Absolutsummierende Operatoren zwischen translationsinvarianten Räumen

Diplomarbeit von Urs Kollbrunner

ausgeführt unter der Leitung von
Prof. Dr. Hans Jarchow
Institut für Mathematik
Universität Zürich

Sommersemester 2000
Korrektur vom 23.11.2002

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

In dieser Arbeit werden gewisse Resultate der Funktionalanalysis, insbesondere die Theorie der absolutsummierenden Operatoren und ihre Verwandten auf Räume angewandt, die aus der harmonischen Analysis stammen. Die Arbeit basiert auf einem Artikel von Kwapień und Pełczyński [8]. Im ersten Kapitel werden zuerst die grundlegenden Begriffe der Funktionalanalysis bereitgestellt. Anschliessend findet man eine kurze Einführung in die harmonische Analysis. Wir beschränken uns auf kompakte abelsche Gruppen. Dabei stehen im Hinblick auf den Rest der Arbeit insbesondere die translationsinvarianten Operatoren im Vordergrund. Anschliessend wird die sogenannte Averaging-Technik vorgestellt, die es erlaubt, gewisse Eigenschaften von translationsinvarianten Operatoren auf allgemeinere Operatoren zu übertragen. Im 2. Kapitel stehen die zentralen Aussagen. Wir untersuchen translationsinvariante Operatoren zwischen Funktionenräumen über G von Funktionen, deren Fouriertransformierte den Träger in einer vorgegebenen Teilmenge E der dualen Gruppe Γ haben. Es zeigt sich, dass gewisse Eigenschaften von E anderen Eigenschaften von gewissen Operatoren zwischen diesen Funktionenräumen entsprechen. Wir zeigen im Einzelnen:

$$
\begin{aligned}
E \text{ Sidonmenge} \quad &\Leftrightarrow \quad \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \\
E \ \Lambda(2)\text{-Menge} \quad &\Leftrightarrow \quad \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \\
E \text{ quasi-Cohenmenge} \quad &\Leftrightarrow \quad \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \\
E \text{ quasi-Marcinkiewiczmenge} \quad &\Rightarrow \quad \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \\
E \text{ Gordon-Lewis-Menge} \quad &\Leftrightarrow \quad \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))
\end{aligned}
$$

Die verwendeten Begriffe und Bezeichnungen werden im Laufe der Arbeit vorgestellt. Ob für quasi-Marcinkiewiczmengen auch die Umkehrung gilt, ist nicht bekannt.

Diese Resultate können nun dazu verwendet werden, um mit Mitteln der Funktionalanalysis, im Speziellen der Theorie der absolutsummierenden Operatoren, Teilmengen der dualen Gruppe zu klassifizieren.

1 Grundlagen

Im ersten Kapitel möchte ich einerseits einige Bezeichnungen festhalten, die in der ganzen Arbeit gelten sollen. Andererseits befindet sich hier ein Überblick über die Theorie der absolutsummierenden Operatoren und ihren Verwandten und eine kurze Einführung in die Grundlagen der harmonische Analysis. Den Abschluss bildet die Averaging-Technik.

1.1 Allgemeine Begriffe

Mit $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ wird der Körper der reellen bzw. der komplexen Zahlen bezeichnet. Für einen Banachraum soll ein Unterraum per Definition bereits abgeschlossen sein. Für zwei Banachräume X und Y bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(X, Y)$ den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y, versehen mit der Operatorennorm. Die Elemente werden wir Homomorphismen nennen. Einen bijektiven Homomorphismus nennen wir Isomorphismus. Von speziellem Interesse ist der Dualraum $X^* := \mathfrak{L}(X, \mathbb{K})$ eines Banachraumes. Mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wir die Dualklammern

$$X^* \times X \to \mathbb{K}, (x^*, x) \mapsto \langle x^*, x \rangle := x^*(x).$$

Weiter sei k_X die Evaluationsabbildung

$$X \to X^{**}, x \mapsto (x^* \mapsto \langle x^*, x \rangle).$$

Diese ist isometrisch, so dass X immer als Unterraum von X^{**} aufgefasst werden kann. Für einen Massraum (Ω, Σ, μ) definieren wir $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$ als den Banachraum der Äquivalenzklassen von μ-fast überall gleichen $\mathbb{C}$-wertigen Abbildungen auf Ω, für die

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty,$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_p := (\int_G |f|^p d\mu)^{1/p}.$$

Eine Abbildung $f : \Omega \to X$ in einen Banachraum X heisst einfach, wenn $f = \sum_{i=1}^n x_i 1_{E_i}$ geschrieben werden kann, wobei $x_i \in X$ und $E_i \in \Sigma$ liegen. Weiter heisst f μ-messbar, wenn eine Folge von einfachen Funktionen existiert, so dass $\lim_n \|f - f_n\|_X = 0$ μ-fast überall. Man nennt f schwach μ-messbar, falls $\langle x^*, f(\cdot) \rangle$ für jedes $x^* \in X^*$ μ-messbar ist. Eine μ-messbare Abbildung f heisst integrierbar, wenn

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty.$$

Für diese Funktionen ist dann das **Bochner-Integral** definiert, das wir mit

$$\int_\Omega f d\mu$$

bezeichnen. Für die Einzelheiten und Eigenschaften dieses Integrals verweise ich auf [3] Kapitel II.

Sei K ein separierter kompakter topologischer Raum. Dann bezeichnet $C(K)$ den Banachraum der stetigen $\mathbb{K}$-wertigen Abbildungen, versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Für eine Abbildung $f \in C(K)$ ist der Träger als

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in K : f(x) \neq 0\}}$$

definiert.

1.2 Eigenschaften von Banachräumen

Auf Banachräumen benötigen wir neben der Normtopologie noch weitere Topologien. Es handelt sich hierbei einerseits um die schwache Topologie $\sigma(X, X^*)$ auf X, die gröbste Topologie, die alle $x^* \in X^*$ stetig macht, andererseits um die schwach-$*$ Topologie $\sigma(X^*, X)$ auf X^*, die gröbste Topologie, die alle $x \in X$, aufgefasst als Elemente von X^{**}, stetig macht.

Ein Banachraum X heisst **$\mathfrak{L}_{p,\lambda}$-Raum** $(1 \leq p \leq \infty, \lambda > 1)$, falls jeder endlichdimensionale Teilraum E von X in einem endlichdimensionalen Teilraum F von X enthalten ist, für den ein Isomorphismus $v : F \to l_p^{dimF}$ mit $\|v\| \, \|v^{-1}\| < \lambda$ existiert. X ist ein **$\mathfrak{L}_p$-Raum**, wenn ein $\lambda > 1$ existiert, so dass X ein $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$-Raum ist.

Typ und Cotyp eines Raumes

Mit r_n bezeichnen wir die Rademacherfunktionen. Ein Banachraum X hat **Typ** p, falls eine Konstante $\theta \geq 0$ existiert, so dass für jede Wahl von endlich vielen Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ aus X die Ungleichung

$$(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^n r_k(t)x_k\|^2 dt)^{1/2} \leq \theta(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p)^{1/p}$$

erfüllt ist. Falls X Typ p hat, bezeichnen wir die kleinstmögliche Konstante θ mit $T_p(X)$; dies ist die **Typ p Konstante** von X.

Weiter hat der Banachraum X **Cotyp** q, falls eine Konstante $\kappa \geq 0$ existiert, so dass für jede Wahl von endlich vielen Vektoren $x_1 \ldots x_n$ die Ungleichung

$$(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q)^{1/q} \leq \kappa(\int_0^1 \|\sum_{k=1}^n r_k(t)x_k\|^2 dt)^{1/2}$$

erfüllt ist. Die kleinste der Konstanten κ bezeichnen wir mit $C_p(X)$; sie heisst **Cotyp q Konstante** von X. Ein $\mathfrak{L}_{p,\lambda}$-Raum hat Typ $\min\{p, 2\}$ und Cotyp $\max\{2, p\}$, und das ist bestmöglich.

1.3 Eigenschaften von Operatoren

In diesem Teil führe ich die Begriffe über absolutsummierende und damit verwandte Operatoren ein. Die Definitionen und weitere Eigenschaften sind dem Buch [2] entnommen, sofern ich keine anderen Angaben mache. X, Y und Z sollen in diesem Abschnitt beliebige Banachräume bezeichnen.

Mit $\mathcal{F}(X,Y)$ bezeichnen wir den Vektorraum der Operatoren endlichen Ranges. Für $x^* \in X^*$ und $y \in Y$ ist die Abbildung $x^* \otimes y : X \to Y; x \mapsto \langle x^*, x\rangle y$ definiert.

Die Spur

Sei $u \in \mathcal{F}(X,X)$ für einen Banachraum X. Dann hat u eine Darstellung der Form

$$u = \sum_{i=1}^{N} x_i^* \otimes y_i$$

mit $y_1 \dots y_N \in X$ und $x_1^*, \dots x_N^*$. Dann wird die Spur von u definiert durch

$$\mathrm{tr}(u) := \sum_{i=1}^{N} \langle x_i^*, y_i\rangle.$$

Der Wert dieser Summe ist unabhängig von der gewählten Darstellung von u. Weiter gilt $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(u^*)$. Sind $v \in \mathfrak{L}(X,Y)$ und $w \in \mathfrak{L}(Y,X)$, wobei v oder w von endlichem Rang ist, so gilt $\mathrm{tr}(vw) = \mathrm{tr}(wv)$.

Banachideale

Ein **Operatorenideal** ist eine Methode, die jedem Paar (X,Y) von Banachräumen einen linearen Teilraum $\mathcal{A}(X,Y)$ von $\mathfrak{L}(X,Y)$ zuordnet, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $x^* \otimes y \in \mathcal{A}(X,Y)$ für alle $x^* \in X^*, y \in Y$,

(ii) Sind X_0 und Y_0 zwei weitere Banachräume, so ist $uvw \in \mathcal{A}(X_0,Y_0)$ für alle $u \in \mathfrak{L}(Y,Y_0), v \in \mathcal{A}(X,Y), w \in \mathfrak{L}(X_0,X)$.

Kann man weiter $\mathcal{A}(X,Y)$ für beliebige Banachräume X und Y mit einer Norm α versehen, so dass

(i) $\alpha(x^* \otimes y) = \|x^*\|\,\|y\|$,

(ii) $\alpha(uvw) \le \|u\|\alpha(v)\|w\|$ für alle Banachräume X_0 und Y_0 und $u \in \mathfrak{L}(Y,Y_0), v \in \mathcal{A}(X,Y)$, $w \in \mathfrak{L}(X_0,X)$,

(iii) $[\mathcal{A}(X,Y),\alpha]$ ist ein Banachraum,

dann nennt man $[\mathcal{A},\alpha]$ ein **Banachideal**.

Seien $[\mathcal{A}, \alpha]$ und $[\mathcal{B}, \beta]$ zwei Banachideale, wobei für alle Banachräume X und Y die Inklusion $\mathcal{A}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ gelte. Dann existiert eine Konstante C, so dass für alle Banachräume X und Y und alle $u \in \mathcal{A}(X, Y)$ die Ungleichung $\beta(u) \leq C\alpha(u)$ gilt.

Die bekanntesten Beispiele sind das Banachideal $[\mathfrak{L}, \|\cdot\|]$ der stetigen linearen Operatoren, das Banachideal $[\mathcal{K}, \|\cdot\|]$ der kompakten Operatoren, das Banachideal $[\mathcal{W}, \|\cdot\|]$ der schwach kompakten Operatoren und das Banachideal $[\mathcal{V}, \|\cdot\|]$ der vollstetigen Operatoren. Wir werden weitere kennenlernen, bei denen die Norm nicht die Operatorennorm ist.

Duale Ideale

Seien $[\mathcal{A}, \alpha]$ ein Banachideal und X und Y Banachräume. Wir sagen, ein Operator $v : X \to Y$ gehöre zu $\mathcal{A}^d(X, Y)$, wenn $u^* \in \mathcal{A}(Y^*, X^*)$. Wir definieren dann $\alpha^d(u) := \alpha(u^*)$.

So wird das Banachideal $[\mathcal{A}^d, \alpha^d]$ erhalten; man nennt es das zu $[\mathcal{A}, \alpha]$ **duale Ideal**.

Adjungierte Ideale

Seien $[\mathcal{A}, \alpha]$ ein beliebiges Banachideal und X und Y Banachräume. Wir sagen, ein Operator $v : X \to Y$ gehöre zu $\mathcal{A}^*(X, Y)$, wenn ein $C > 0$ existiert, so dass für alle endlichdimensionalen Räume E und F und Operatoren $w \in \mathfrak{L}(E, X)$, $u \in \mathfrak{L}(Y, F)$ und $t \in \mathfrak{L}(F, E)$ gilt

$$|\operatorname{tr} tuvw| \leq C\alpha(t)\|u\| \, \|w\|.$$

Die kleinste der Konstanten C, die obige Bedingung erfüllt, wird mit $\alpha^*(v)$ bezeichnet. Auch $[\mathcal{A}^*, \alpha^*]$ ist ein Banachideal, das zu $[\mathcal{A}, \alpha]$ **adjungierte Ideal**. $[\mathcal{A}^{**}, \alpha^{**}]$ ist das adjungierte Ideal zu $[\mathcal{A}^*, \alpha^*]$.

Maximale Ideale

Seien $[\mathcal{A}, \alpha]$ und $[\mathcal{B}, \beta]$ zwei Banachideale, so schreiben wir

$$[\mathcal{A}, \alpha] \subset [\mathcal{B}, \beta],$$

wenn für jede Wahl von Banachräumen X und Y die Beziehungen $\mathcal{A}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ und $\beta(u) \leq \alpha(u)$ für alle $u \in \mathcal{A}(X, Y)$ gelten. Natürlich bedeutet

$$[\mathcal{A}, \alpha] = [\mathcal{B}, \beta],$$

dass sowohl $[\mathcal{A}, \alpha] \subset [\mathcal{B}, \beta]$ als auch $[\mathcal{B}, \beta] \subset [\mathcal{A}, \alpha]$ erfüllt sind. Für alle Banachideale gilt $[\mathcal{A}, \alpha] \subset [\mathcal{A}^{**}, \alpha^{**}]$. Ist sogar $[\mathcal{A}, \alpha] = [\mathcal{A}^{**}, \alpha^{**}]$ erfüllt, nennt man $[\mathcal{A}, \alpha]$ **maximal**. Genau dann ist ein Banachideal $[\mathcal{A}, \alpha]$ maximal, wenn es adjungiert zu einem Banachideal ist.

p-summierende Operatoren

Ein Operator $u : X \to Y$ zwischen Banachräumen heisst ***p*-summierend** $(0 < p < \infty)$, falls es ein $c \geq 0$ gibt, so dass für jede natürliche Zahl m und jede Wahl von Vektoren $x_1, \dots x_m \in X$ gilt:

$$(\sum_{i=1}^{m} \|ux_i\|^p)^{1/p} \leq c \cdot \sup\{(\sum_{i=1}^{m} |\langle x^*, x_i\rangle|^p)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\}.$$

Die Menge der p-summierenden Operatoren von X nach Y bezeichnen wir mit $\Pi_p(X, Y)$. Sei $\pi_p(u)$ die kleinste Konstante, die obige Ungleichung erfüllt. Für $1 \leq p < \infty$ wird so ein maximales Banachideal $[\Pi_p, \pi_p]$ erhalten. Ist $0 < p < 1$, so erhalten wir ein quasi-Banachideal (vgl. [12]). Anstelle von 1-summierend sagt man auch absolutsummierend.

Weiter heisst der Operator $u : X \to Y$ **0-summierend**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede Wahl von endlich vielen Vektoren $x_1, \dots x_n \in X$ gilt

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \min\{1, |\langle x^*, x\rangle|\} < \delta \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k \leq n} \min\{1, \|ux_i\|\} < \varepsilon.$$

Folgende Aussagen bewies Maurey in [11].

1.3.1 Satz *(i) Für beliebige Banachräume X und Y und jedes $0 < r < 1$ gilt $\Pi_0(X, Y) = \Pi_r(X, Y)$.*

(ii) Für einen $\mathfrak{L}_1$-Raum X und einen Hilbertraum H gilt $\Pi_0(X, H) = \mathfrak{L}(X, H)$.

Für beliebige Banchräume X und Y und $1 \leq p < q < \infty$ gilt $\Pi_p(X, Y) \subset \Pi_q(X, Y)$ und

$$\pi_q(u) \leq \pi_p(u) \ \forall u \in \Pi_p(X, Y).$$

1.3.2 Satz (Satz von Grothendieck) *Ist X ein $\mathfrak{L}_1$-Raum und Y ein $\mathfrak{L}_2$-Raum, so ist jeder Operator $u : X \to Y$ 1-summierend, und mit einer von X und Y unabhängigen Konstanten $C > 0$ gilt $\pi_1(u) \leq C\|u\|$.*

Die kleinste Konstante, die diese Ungleichung für alle $\mathfrak{L}_1$-Räume X, $\mathfrak{L}_2$-Räume Y und alle $u : X \to Y$ erfüllt, heisst Grothendieckkonstante und wird mit κ_G bezeichnet.

Die folgenden eng verwandten Operatoren stellen sich als Prototypen von p-summierenden Operatoren heraus $(1 \leq p < \infty)$.

- Die kanonische Abbildung $j_p : C(K) \to L^p(\mu)$ (K: kompakter Hausdorffraum, μ: reguläres Borelmass auf K) ist p-summierend mit $\pi_p(j_p) = (\mu(K))^{1/p}$.
- Die formale Inklusion $i_p : L^\infty(\mu) \to L^p(\mu)$ ((Ω, Σ, μ): endlicher Massraum) ist p-summierend mit $\pi_p(i_p) = (\mu(\Omega))^{1/p}$.

Der prototypische Charakter beruht auf dem folgenden Ergebnis:

1.3.3 Satz (Dominanzatz von Pietsch) *Seien $1 \leq p < \infty$, $u : X \to Y$ ein Operator und K eine schwach-$*$ kompakte, normierende Teilmenge von B_{X^*}. Genau dann ist u p-summierend, wenn eine Konstante C und ein Wahrscheinlichkeitsmass $\mu \in (C(K))^*$ existieren, so dass für jedes $x \in X$*

$$\|ux\| \leq C(\int_K |\langle x^*, x\rangle|^p d\mu(x^*))^{1/p}$$

gilt. Dann ist $\pi_p(u)$ die kleinste Konstante C, für die ein solches Mass existiert.

Masse, welche die Ungleichung erfüllen, nennt man Pietschmasse.

Daraus folgt

1.3.4 Satz (Faktorisierungssatz von Pietsch) *Seien $1 \leq p < \infty$, $u : X \to Y$ ein Operator und K eine schwach-$*$ kompakte, normierende Teilmenge von B_{X^*}. Genau dann ist u p-summierend, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmass $\mu \in (C(K))^*$, ein abgeschlossener Teilraum X_p von $L^p(\mu)$ und ein Operator $\hat{u} : X_p \to Y$ existieren, so dass $j_p i_X(X) \subset X_p$ und $\hat{u} j_p i_X(x) = ux$ für alle $x \in X$ gelten. Bezeichnet j_p^X die durch j_p induzierte Abbildung $i_X(X) \to X_p$, so soll also folgendes Diagramm kommutativ sein:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i_X(X) \arrow[r, "j_p^X"] \arrow[d, hook] & X_p \arrow[u, "\hat{u}"'] \arrow[d, hook] \\
C(K) \arrow[r, "j_p"] & L^p(\mu)
\end{tikzcd}$$

Die Aussage gilt auch mit $L^\infty(\mu)$ und i_p anstelle von $C(K)$ und j_p. Im Allgemeinen existiert keine Faktorisierung über die volle Abbildung i_p. Die Frage, wann dies möglich ist, führt zu den p-integralen Operatoren.

p-integrale Operatoren

Ein Banachraumoperator $u : X \to Y$ heisst ***p*-integral** ($1 \leq p \leq \infty$), falls ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ) und Operatoren $a \in \mathfrak{L}(L^p(\mu), Y^{**})$ und $b \in \mathfrak{L}(X, L^\infty(\mu))$ existieren, so dass das folgende Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "b"'] & Y \arrow[r, "k_Y"] & Y^{**} \\
L^\infty(\mu) \arrow[rr, "i_p"'] & & L^p(\mu) \arrow[u, "a"']
\end{tikzcd}$$

Mit $\mathcal{I}_p(X,Y)$ bezeichnet man die Menge der p-integralen Operatoren von X nach Y. Durch $\iota_p(u) := \inf\{\|a\|\|b\| : a,b \text{ erfüllen obige Bedingung}\}$ wird eine vollständige Norm auf $\mathcal{I}_p(X,Y)$ definiert. Der Einbezug von $k_Y : Y \to Y^{**}$ garantiert, dass $[\mathcal{I}_p, \iota_p]$ maximal wird.

Weiter ist ein Operator $u : X \to Y$ genau dann 1-integral, wenn dies für $u^* : Y^* \to X^*$ gilt. Dann ist $\iota_1(u) = \iota_1(u^*)$.

Wir betrachten nun Operatoren, bei denen μ sogar diskret gewählt werden kann.

p-nukleare Operatoren

Ein Operator $u : X \to Y$ heisst ***p*-nuklear**, wenn es Operatoren $a \in \mathfrak{L}(l_p, Y), b \in \mathfrak{L}(X, l_\infty)$ sowie eine Folge $(\lambda_n)_n \in l_p$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle a} \\ l_\infty & \xrightarrow[M_\lambda]{} & l_p \end{array}$$

Hier ist $M_\lambda : l_\infty \to l_p, (\xi_n) \mapsto (\lambda_n \xi_n)$ der von $(\lambda_n) \in l_p$ erzeugte Diagonaloperator. Die Menge der p-nuklearen Operatoren von X nach Y bezeichnet man mit $\mathcal{N}_p(X,Y)$. Durch $\nu_p(u) := \inf\{\|a\|\|M_\lambda\|\|b\| : a, b, M_\lambda \text{ erfüllen obige Bedingung}\}$ wird auf $\mathcal{N}_p(X,Y)$ eine vollständige Norm definiert. $[\mathcal{N}_p, \nu_p]$ ist ein Banachideal, aber nicht maximal. $[\mathcal{N}_1, \nu_1]$ ist überhaupt das kleinste Banachideal. 1-nukleare Operatoren werden oft kurz nukleare Operatoren genannt.

Offenbar ist ein Operator $u \in \mathfrak{L}(X,Y)$ genau dann nuklear, wenn $x_i^* \in X^*$ und $y_i \in Y$ $(i \in \mathbb{N})$ existieren, so dass

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* \otimes y_i \text{ und } \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \, \|y_i\| < \infty. \tag{1}$$

In diesem Fall ist

$$\nu_1(u) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| \, \|y_i\| : (x_i^*)_i, (y_i)_i \text{ erfüllen (1)}\}.$$

L_p-faktorisierbare Operatoren

Ein Operator $u : X \to Y$ heisst **L_p-faktorisierbar** $(1 \le p \le \infty)$, wenn es einen Massraum (Ω, Σ, μ) und Abbildungen $a \in \mathfrak{L}(L_p(\mu), Y^{**})$ und $b \in \mathfrak{L}(X, L_p(\mu))$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle k_Y} \\ L_p(\mu) & \xrightarrow[a]{} & Y^{**} \end{array}$$

Die Menge der L_p-faktorisierbaren Operatoren bezeichnet man mit $\Gamma_p(X,Y)$. Durch $\gamma_p(u) := \inf\{\|a\|\,\|b\| : a,b$ erfüllen obige Bedingung$\}$ wird auf $\Gamma_p(X,Y)$ eine vollständige Norm definert. Wieder ist $[\Gamma_p, \gamma_p]$ ein Banachideal und wegen des Einbezugs von $k_Y : Y \to Y^{**}$ maximal.

Schatten-von Neumann-Klassen

Seien H und K Hilberträume. Dann hat jedes $u \in \mathcal{K}(H,K)$ eine Darstellung der Form

$$u = \sum_n \tau_n(\cdot, e_n) f_n,$$

wobei (e_n) eine Orthonormalfolge in H, (f_n) eine Orthonormalfolge in K und (τ_n) eine Folge aus c_0 ist. u gehört zur **p-ten Schatten-von Neumann-Klasse** $\mathcal{S}_p(H,K)$ $(1 \leq p < \infty)$, wenn (τ_n) sogar in l_p liegt. Der Wert

$$\sigma_p(u) := (\sum_n \tau_n^p)^{1/p}$$

ist unabhängig von der Darstellung, und $[\mathcal{S}_p(H,K), \sigma_p(\cdot)]$ ist ein Banachraum.

Die Operatoren in $\mathcal{S}_2(H,K)$ werden auch Hilbert-Schmidt-Operatoren genannt, $\mathcal{S}_1(H,K)$ ist sogeannte die Spurklasse. Wir benötigen folgende Eigenschaften.

1.3.5 Satz *Seien H und K Hilberträume und $u \in \mathfrak{L}(H,K)$. Dann gelten:*

(i) Genau dann gehört u zu $\mathcal{S}_2(H,K)$, wenn eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ in H existiert, so dass $\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2 < \infty$. In diesem Fall ist $\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$, und es gilt

$$\sigma_2(u) = (\sum_{i\in I} \|ue_i\|^2)^{1/2}.$$

(ii) Genau dann ist $u \in \mathcal{S}_2(H,K)$, wenn $u^* \in \mathcal{S}_2(K,H)$, und dann gilt $\sigma_2(u^*) = \sigma_2(u)$.

Beziehungen zwischen den Operatorenidealen

Ich möchte hier einige Beziehungen zwischen den verschiedenen Operatorenidealen aufführen, die im Laufe dieser Arbeit noch gebraucht werden.

1.3.6 Satz *Für beliebige Banachräume X und Y und für $1 \leq p < \infty$ gelten:*

(i) $\mathcal{N}_p(X,Y) \subset \mathcal{I}_p(X,Y) \subset \Pi_p(X,Y)$, wobei $\iota_p(v) \leq \nu_p(v)$ für jedes $v \in \mathcal{N}_p(X,Y)$ und $\pi_p(u) \leq \iota_p(u)$ für jedes $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$ gilt.

(ii) $\mathcal{I}_p(X,Y) \subset \Gamma_p(X,Y)$ mit $\gamma_p(u) \leq \iota_p(u)$ für $u \in \mathcal{I}_p(X,Y)$.

(iii) $\mathcal{W} \circ \mathcal{I}_1 = \mathcal{N}_1$.

(iv) $\Pi_2 \circ \Pi_2 \subset \mathcal{N}_1$, *und es gilt* $\nu_1(uv) \leq \pi_2(u)\pi_2(v)$ *für jedes* $u \in \Pi_2(Y, Z)$ *und* $v \in \Pi_2(X, Y)$.

(v) *Für jeden Banachraum* X *und jeden Hilbertraum* H *gilt* $\Gamma_1(X, H) \subset \Pi_1(X, H)$.

(vi) *Hat* Y *die Radon-Nikodym-Eigenschaft und ist zusätzlich* Y *in* Y^{**} *komplementiert, so gilt* $\mathcal{I}_1(X, Y) = \mathcal{N}_1(X, Y)$ *mit* $\nu_1(u) = \iota_1(u)$ *für* $u \in \mathcal{I}_1(X, Y)$*. Speziell ist dies der Fall, wenn* Y *reflexiv ist oder* $Y = l_1$.

(vii) *Ist* X *reflexiv, so gilt* $\mathcal{N}_p(X, Y) = \mathcal{I}_p(X, Y)$ *mit* $\nu_p(u) = \iota_p(u)$ *für alle* $u \in \mathcal{N}_p(X, Y)$.

(viii) *Ist* K *ein kompakter separierter topologischer Raum , so ist jeder* p*-summierende Operator* $u : C(K) \to Y$ *auch* p*-integral, und es gilt* $\pi_p(u) = \iota_p(u)$ *für jedes* $u \in \Pi_p(C(K), Y)$.

(ix) *Seien* H *und* K *Hilberträume und* $1 < p < \infty$*. Dann gelten* $\mathcal{I}_p(H, K) = \mathcal{N}_p(H, K) = \Pi_2(H, K) = \mathcal{S}_2(H, K)$ *isomorph, für* $p = 2$ *sogar isometrisch.*

(x) *Seien* H *und* K *Hilberträume, dann gelten* $\mathcal{I}_1(H, K) = \mathcal{N}_1(H, K) = \mathcal{S}_1(H, K)$ *isometrisch.*

(xi) $[\Gamma_\infty, \gamma_\infty] = [\mathcal{I}_\infty, \iota_\infty] = [\Pi_1^*, \pi_1^*]$, $[\Gamma_1, \gamma_1] = [(\Pi_1^d)^*, (\pi_1^d)^*]$ *und* $[\Gamma_1^*, \gamma_1^*] = [\Pi_1^d, \pi_1^d]$.

(xii) $[\mathcal{I}_p^*, \iota_1^*] = [\Pi_{p^*}, \pi_{p^*}]$ *für* $1 < p < \infty$.

(xiii) $[\mathfrak{L}^*, \|\cdot\|^*] = [\mathcal{I}_1, \iota_1]$ *und* $[\mathcal{I}_1^*, \iota_1^*] = [\mathfrak{L}, \|\cdot\|]$.

Die Eigenschaft (vi) wird im Beweis des folgenden Satzes mehrfach verwendet.

1.3.7 Satz *Seien* X, Y *und* Z *beliebige Banachräume und* H *ein Hilbertraum. Dann gilt*

(i) *Ein Operator* $u : X \to Y$ *hat genau dann 1-summierende Adjungierte* u^**, wenn* $vu : X \to l_1$ *für jeden beschränkten Operator* $v : Y \to l_1$ *1-nuklear ist. Dann gilt*

$$\pi_1(u^*) = \sup\{\nu_1(vu); v : Y \to l_1, \|v\| = 1\}.$$

(ii) *Ein Operator* $s : H \to Z$ *ist genau dann 1-nuklear, wenn*

$$C(s) := \sup\{|\operatorname{tr} vs|; v \in \mathcal{F}(Z, H), \|v\| = 1\} < \infty.$$

Dann gilt:

$$\nu_1(s) = C(s).$$

(iii) *Sei* $u : H \to Y$*. Existiert eine Konstante* $C > 0$*, so dass*

$$\sup\{|\operatorname{tr} vwu| : v \in \mathcal{F}(l_1, H), \|v\| = 1, w : Y \to l_1, \|w\| = 1\} \leq C,$$

dann gilt $u \in \Pi_1^d(H, Y)$ *mit* $\pi_1^d(u) \leq C$.

Beweis (i) Wegen 1.3.6(vi), fallen die 1-nuklearen und 1-integralen Operatoren von X nach l_1 zusammen. Wegen der Maximalität von $[\mathcal{I}_1, \iota_1]$ ist uv genau dann für alle $v : Y \to l_1$ integral, wenn

$$D(u) := \sup_{v \in \mathfrak{L}(Y, l_1^n), \|v\|=1, n\in\mathbb{N}} \iota_1(vu) < \infty.$$

Es ist einfach zu sehen, dass

$$\sup_{v \in \mathfrak{L}(Y, l_1), \|v\|=1} \iota_1(vu) = D(u).$$

Sei zuerst $u \in \Pi_1^d(X,Y)$ und $v \in \mathfrak{L}(Y, l_1^n)$. Setze $w := v^*$. Dann ist $(vu)^* = u^* w$ 1-integral, und es gilt mit 1.3.6(viii)

$$\iota_1(vu) = \nu_1(u^* w) \leq \pi_1(u^*)\|w\| = \pi_1(u^*)\|v\|.$$

Durch Übergang zum Supremum erhalten wir die Abschätzung

$$D(u) \leq \pi_1(u^*).$$

Wir zeigen nun die Umkehrung. Wähle dazu ein $w \in \mathfrak{L}(l_\infty^n, Y)$. Setze $v := w^*|_Y$. Dann ist $w = v^*$. Nach Voraussetzung gilt

$$\iota_1(vu) \leq D(u)\|v\|.$$

Es folgt

$$\iota_1(u^* w) = \iota_1((vu)^*) = \iota_1(vu) \leq D(u)\|v\|.$$

Mit [2] 2.7 folgt, dass u^* 1-summierend ist und dass

$$\pi_1(u^*) \leq D(u)$$

gilt.

(ii) Sei zuerst $s = \mathcal{I}_1(H,Z)$. Für jeden Operator $v \in \mathcal{F}(Z,H)$ mit $\|v\| = 1$ gilt

$$|\operatorname{tr}(vs)| \leq \iota_1(vs) = \nu_1(vs) \leq \nu_1(s) < \infty.$$

Also folgt

$$C(s) \leq \nu_1(s).$$

Für die Umkehrung beachten wir 1.3.6(vii) und $[\mathfrak{L}^*, \|\cdot\|^*] = [\mathcal{I}_1, \iota_1]$. Seien E und F endlichdimensionale Räume, $u \in \mathfrak{L}(Y,F)$, $t \in \mathfrak{L}(F,E)$, $w \in \mathfrak{L}(E,X)$. Dann gilt gemäss den Voraussetzungen

$$|\operatorname{tr}(tusw)| = |tr(wtus)| \leq C(s)\|wtu\| \leq C(s)\|w\|\,\|t\|\,\|u\|.$$

Damit ist s 1-integral mit $\iota_1(s) \leq C(s)$.

(iii) Wendet man (ii) auf $Z = l_1$ und $s := wu$ für ein beliebiges $w : Y \to l_1$ mit $\|w\| = 1$ an, so erhält man, dass wu 1-nuklear ist und dass

$$\nu_1(wu) \leq C$$

gilt. Setzt man in (i) $X = H$ so, ergibt dies, dass u^* 1-summierend ist mit

$$\pi_1(u^*) \leq C.$$

■

1.4 Harmonische Analysis

Im folgenden stelle ich die wichtigsten Resultate aus der harmonischen Analysis vor. Die Resultate kann man z.B. bei Lutz[10], Hewitt/Ross [5],[6] und Folland [4] nachschlagen.

Topologische Gruppen und Haarmasse

Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, soll G stets eine abelsche kompakte (Hausdorffsche) topologische Gruppe sein. Deren Gruppenverknüpfung schreiben wir additiv. Mit $\mathfrak{B}(G)$ bezeichnen wir die Borelalgebra auf G und mit $\mathcal{M}(G)$ die Menge der regulären Borelmasse auf G.

Unter diesen Massen sind besonders die **translationsinvarianten Masse** von Interesse, d.h. Masse $\mu \in \mathcal{M}(G)$, welche die Bedingung $\mu(a + E) = \mu(E)$ für jedes $E \in \mathfrak{B}(G)$ und für alle $a \in G$ erfüllen. Auf G gibt es genau ein translationsinvariantes Wahrscheinlichkeitsmass, das **Haarmass** von G. Wir werden es im Folgenden mit m_G bezeichnen.

Für die dazugehörigen Räume $L^p(m_G)$ schreiben wir $L^p(G)$. Wir haben dann

$$C(G) \subset L^p(G) \subset L^q(G) \subset L^1(G) \ (1 \leq q \leq p < \infty),$$

wobei die Einbettungen Norm 1 haben. Weiter haben wir:

1.4.1 Satz *Für jede Funktion $f \in L^1(G)$ und $a \in G$ gelten*

(i) $\int_G f(x)dm_G(x) = \int_G f(x + a)dm_G(x)$ *(Translationsinvarianz).*

(ii) $\int_G f(x)dm_G(x) = \int_G f(-x)dm_G(x)$ *(Inversionsinvarianz).*

Faltung

Zwei Massen λ und ν aus $\mathcal{M}(G)$ wird durch die Definition

$$(\lambda * \nu)(E) := (\lambda \otimes \nu)(\{(x, y) \in G \times G : x + y \in E\})$$

ein neues Mass aus $\mathcal{M}(G)$ zugeordnet, die **Faltung** von λ und μ. Für spätere Zwecke ist es sinnvoll, diesen Ausdruck umzuformen. Dazu definieren wir für eine Menge $E \in \mathfrak{B}(G)$ die Menge $E_{(2)} := \{(x, y) \in G \times G : x + y \in E\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\lambda * \nu)(E) = (\lambda \otimes \nu)(E_{(2)}) &= \int_{E_{(2)}} d(\lambda \otimes \nu) = \int_G \int_G 1_{E_{(2)}}(x, y) d\lambda(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \int_G 1_E(x + y) d\lambda(x) d\nu(y) = \int_G \int_G 1_{E-y}(x) d\lambda(x) d\nu(y) \\ &= \int_G \lambda(E - y) d\nu(y).\end{aligned}$$

1.4.2 Satz *Die Abbildung $* : \mathcal{M}(G) \times \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G); (\lambda, \nu) \mapsto \lambda * \nu$ ist bilinear, assoziativ und kommutativ. Mit der Variationsnorm haben wir $\|\lambda * \nu\| \leq \|\lambda\| \, \|\nu\|$. Bezeichnet δ_0 das Punktmass in 0, so gilt*

$$\delta_0 * \mu = \mu = \mu * \delta_0$$

für alle Masse $\mu \in \mathcal{M}(G)$. Die Faltung macht also $\mathcal{M}(G)$ zu einer Banachalgebra mit Eins.

Für jedes $f \in L^1(G)$ wird durch $\mu_f(A) := \int_A f dm_G$ ein Mass $\mu_f \in \mathcal{M}(G)$ definiert. Die Zuordnung $f \mapsto \mu_f$ identifiziert $L^1(G)$ genau mit den bezüglich m_G absolutstetigen Massen in $\mathcal{M}(G)$. Man kann zeigen, dass $\mu_f * \mu_g$ für $f, g \in L^1(G)$ ebenfalls bezüglich m_G absolutstetig ist und mit der fast überall definierten Funktion $(f * g)(y) := \int_G f(y - x) g(x) dm_G(x)$ aus $L^1(G)$ die Beziehung $\mu_{f*g} = \mu_f * \mu_g$ gilt. Diese Funktion wird die Faltung von f und g genannt. Für „gemischte Terme“ erhält man natürlich $(f * \mu)(y) = \int_G f(y - x) d\mu(x) = (\mu * f)(y)$.

Im folgenden Satz sind einige weitere Eigenschaften der Faltung zusammengestellt.

1.4.3 Satz *Sei G eine kompakte, abelsche Gruppe. Dann gelten:*

(i) Die Abbildung $* : L^1(G) \times L^1(G) \to L^1(G); (f, g) \mapsto f * g$ ist wohldefiniert, bilinear, assoziativ und kommutativ. Es gilt $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(ii) Für $f \in L^1(G)$ und $g \in L^p(G) (1 \leq p < \infty)$ ist $f * g \in L^p(G)$, und es gilt die Abschätzung $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

(iii) Sei $\mu \in \mathcal{M}(G)$ und $f \in C(G)$. Dann ist $\mu * f \in C(G)$, und es gilt $\|\mu * f\|_\infty \leq \|\mu\| \|f\|_\infty$.

(iv) Sei $\mu \in \mathcal{M}(G)$ und $f \in L^p(G) (1 \leq p \leq \infty)$. Dann ist $\mu * f \in L^p(G)$, und es gilt $\|\mu * f\|_p \leq \|\mu\| \, \|f\|_p$.

(v) Sei $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, f \in L^p(G)$ und $g \in L^q(G)$. Dann ist $f * g \in C(G)$.

Insbesondere gilt also:

1.4.4 Satz *$(L^1(G), \| \cdot \|, +, *)$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{M}(G)$.*

Im Allgemeinen besitzt $L^1(G)$ jedoch keine Eins. Folgende Konstruktion bietet einen gewissen Ersatz dafür.

1.4.5 Satz *Sei $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(G)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung V von 0, so dass für alle $g \in L^1(G)$ mit $\operatorname{supp}(g) \subset V$, $g \geq 0$ und $\|g\|_1 = 1$ gilt*

$$\|f * g - f\|_p < \varepsilon$$

Wählt man nun z.B. eine 0-Umgebungsbasis $\mathfrak{U}$ und ordnet jeder darin enthaltenen Umgebung U ein $h_U \in L^1(G)$ mit $h_U \geq 0$ und $\|h_U\|_1 = 1$ zu, so besagt der vorhergehende Satz, dass

$$\lim_{U \in \mathfrak{U}} f * h_U = f \ \forall f \in L^p(G).$$

Deshalb wird $(h_U)_{U \in \mathfrak{U}}$ **approximierende Einheit** genannt.

Die duale Gruppe

Zu einer kompakten, abelschen Gruppe G definiert man die duale Gruppe $\Gamma := \Gamma(G) := \{f : G \to \mathbb{T} : f \text{ ist stetiger Gruppenhomomorphismus}\}$. Die Elemente in Γ nennt man **Charaktere**. Für $\gamma \in \Gamma$ und $x \in G$ schreibt man auch $(\gamma|x)$ anstelle von $\gamma(x)$. Wir versehen $\Gamma(G)$ mit der diskreten Topologie und definieren $\Gamma(\Gamma(G))$ als die Gruppe aller (stetigen) Homomorphismen $\Gamma(G) \to \mathbb{T}$.

1.4.6 Satz *Seinen G, G_1, G_2 kompakte, abelsche Gruppen. Dann gelten:*

(i) $\Gamma(G) \subset C(G)$, *und* $\Gamma(G) \subset L^p(G)$ *mit* $\|\gamma\|_p = 1$ *für jedes* $1 \leq p \leq \infty$.

(ii) $\sigma : \Gamma(G_1) \times \Gamma(G_2) \to \Gamma(G_1 \times G_2)$ *mit* $\sigma((\gamma_1, \gamma_2))(x, y) := (\gamma_1(x), \gamma_2(y)) \in G_1 \times G_2$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

(iii) $\varphi : G \to \Gamma(\Gamma(G)); x \mapsto (\gamma \mapsto \gamma(x))$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*

Wir werden (ii) und (iii) benützen, um die betreffenden Gruppen in der angegebenen Weise zu identifizieren.

1.4.7 Satz *Seien G_1 und G_2 zwei kompakte, abelsche Gruppen, Γ_1 und Γ_2 die dazugehörigen dualen Gruppen und $\Psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\Psi^t : G_2 \to G_1$, so dass $(\gamma|\Psi^t x) = (\Psi\gamma|x)$ für jedes $\gamma \in \Gamma_1, x \in G_2$.*

Beweis Sei $x \in G_2$ beliebig. Definiere $\Phi_x : \Gamma_1 \to \mathbb{T}$ durch $\Phi_x(\gamma) = (\Psi\gamma)(x)$. Wegen

$$\Phi_x(\gamma_1\gamma_2) = \Psi(\gamma_1\gamma_2)(x) = (\Psi(\gamma_1)\Psi(\gamma_2))(x) = \Psi(\gamma_1)(x)\Psi(\gamma_2)(x) = \Phi_x(\gamma_1)\Phi_x(\gamma_2)$$

und $\Phi_x(1_{G_1}) = \Psi(1_{G_1})(x) = 1_{G_2}(x) = 1$ ist Φ_x ein Gruppenhomomorphismus, das heisst $\Phi_x \in \Gamma(\Gamma(G_1))$. Nach 1.4.6(iii) existiert ein eindeutiges Element $y_x \in G_1$, so dass $\gamma(y_x) = \Phi_x(\gamma) = (\Psi\gamma)(x)$ Damit definieren wir die Abbildung $\Psi^t : G_2 \to G_1; x \mapsto y_x$. Wegen der Eindeutigkeit von y_x und

$$(\gamma|\Psi^t(x) + \Psi^t(y)) = (\gamma|\Psi^t(x)) + \gamma(\Psi^t(y)) = (\Psi\gamma|x) + (\Psi\gamma|y) = (\Psi\gamma|x + y) = (\gamma|\Psi^t(x + y))$$

gilt $\Psi^t(x+y) = \Psi^t(x) + \Psi^t(y)$, d.h. Ψ^t ist ein Gruppenhomomorphismus. Sei für die Eindeutigkeit φ eine zweite Abbildung, die unsere Voraussetzung erfüllt. d.h. es gilt $(\gamma|\varphi x) = (\Psi\gamma|x) = (\gamma|\Psi^t x)$ für alle $\gamma \in \Gamma_1$ und $x \in G_2$. Dann folgt mit 1.4.6(iii), dass $\varphi(x) = \Psi^t(x)$ für alle $x \in G_2$. ∎

Wir nennen Ψ^t die zu Ψ **transponierte Abbildung**.

Fourier- und Fourier-Stieltjes-Transformation

Für $f \in L^1(G)$ wird durch $\mathfrak{F}(f)(\gamma) := \hat{f}(\gamma) := \int_G f(x)(\gamma|-x)dm_G(x)$ für $\gamma \in \Gamma$ die sogenannte **Fouriertransformierte** von f definiert. Die Abbildung $\mathfrak{F} : L^1(G) \to \mathbb{C}^\Gamma$ heisst **Fouriertransformation**, sie nimmt die Werte in c_0^Γ an.

Analog definiert man für Masse die **Fourier-Stieltjes-Transformation**. Dabei wird für ein Mass $\nu \in \mathcal{M}(G)$ eine Abbildung in l_∞^Γ durch $\hat{\nu}(\gamma) := \int_G (\gamma|-x)d\nu(x)$ definiert. Es gilt mit den obigen Bezeichnungen $\hat{\nu}_f(\gamma) = \int_G (\gamma|-x)d\nu_f(x) = \int_G (\gamma|-x)f(x)dm_G(x) = \hat{f}(\gamma)$, d.h die Fourier-Stieltjes-Transformation erweitert die Fourier-Transformation. Weiter hat man $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ und $\widehat{\nu * \lambda} = \hat{\nu}\hat{\lambda}$ für $f, g \in L^1(G)$ und $\mu, \nu \in \mathcal{M}(G)$.

1.4.8 Satz *(i) Die Fouriertransformation $\mathfrak{F} : L^1(G) \to c_0^\Gamma$ ist ein stetiger, injektiver Algebrenhomomorphismus.*

(ii) Die Fourier-Stieltjes-Transformation $\mathfrak{F} : \mathcal{M}(G) \to l_\infty^\Gamma$ ist ein stetiger, injektiver Algebrenhomomorphismus.

Den Beweis findet man z.B. in [5].

1.4.9 Lemma *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Für $f \in L^p(G)$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt $|\hat{f}(\gamma)| \leq \|f\|_p$.*

Beweis Denn es ist ja

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\gamma)| &= |\int_G f(x)(\gamma|-x)dm_G(x)| \leq \int_G |f(x)||(\gamma|-x)|dm_G(x) \\ &= \int_G |f(x)|dm_G(x) = \|f\|_1 \leq \|f\|_p. \end{aligned}$$

∎

Das folgende Lemma wird später benötigt. Seien $f : G \to \mathbb{C}$ eine beliebige Abbildung und $a \in G$. Dann wird durch $f_a(x) := f(x-a)$ eine neue Abbildung auf G definiert.

1.4.10 Lemma *Sei $f \in L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ und $a \in G$. Dann ist $f_{-a} \in L^p(G)$, und es gilt $\widehat{f_{-a}}(\gamma) = (\gamma|a)\hat{f}(\gamma)$ für jedes $\gamma \in \Gamma$.*

Beweis

$$\begin{aligned}\widehat{f_{-a}}(\gamma) &= \int_G (\gamma|-x) f(x+a) dm_G(x) = \int_G (\gamma|-x+a) f(x) dm_G(x) \\ &= (\gamma|a) \int_G (\gamma|-x) f(x) dm_G(x) = (\gamma|a)\hat{f}(\gamma)\end{aligned}$$

■

Wir berechnen noch die Fourierkoeffizienten von Produktmassen.

1.4.11 Lemma *Seien G_1 und G_2 zwei topologische Gruppen, $\mu_1 \in \mathcal{M}(G_1)$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}(G_2)$ zwei Masse und $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ aus $\Gamma(G_1 \times G_2)$. Dann ist $\mu_1 \otimes \mu_2 \in \mathcal{M}(G_1 \times G_2)$, und es gilt $\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma) = \hat{\mu}_1(\gamma_1)\hat{\mu}_2(\gamma_2)$.*

Beweis Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned}\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma) &= \int_{G_1 \times G_2} (\gamma|-(x,y)) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y) = \int_{G_1}\int_{G_2} (\gamma_1|-x)(\gamma_2|-y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\ &= \int_{G_1} (\gamma_1|-x) d\mu_1(x) \int_{G_2} (\gamma_2|-y) d\mu_2(y) = \hat{\mu}_1(\gamma_1)\hat{\mu}_2(\gamma_2).\end{aligned}$$

■

Translationsinvariante Räume

Ein Vektorraum X von (m_G-Äquivalenzklassen von) Abbildungen von G nach $\mathbb{C}$ heisst **translationsinvariant**, falls für jedes $f \in X$ und jedes $a \in G$ auch $f_a \in X$ ist. Auf translationsinvarianten Räumen ist also $\tau_a : X \to X, f \mapsto f_a$ für jedes $a \in G$ definiert.
Die typischen Beispiele sind spezielle Unterräume der Banachräume $L^p(G)$ und $C(G)$. Sei dazu $E \subset \Gamma$. Auf G sind alle Charaktere beschränkt, also kann E als Teilmenge von $C(G)$ und damit von allen $L^p(G)$ aufgefasst werden. Mit $\boldsymbol{Trig_E}$ bezeichnen wir die lineare Hülle von E. Für $E = \Gamma$ schreiben wir kurz $\boldsymbol{Trig}$ und nennen die Elemente **trigonometrische Polynome**. Der Abschluss von $Trig_E$ in $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ bzw. $C(G)$ wird mit $L^p_E(G)$ bzw. $C_E(G)$ bezeichnet. $L^p_E(G)$ bzw. $C_E(G)$ ist genau der Raum der Funktionen $f \in L^p(G)$ bzw. $C(G)$ mit $\hat{f}(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in E^c$. Alle diese Räume sind bezüglich der induzierten Norm Banachräume. $\mathcal{M}_E(G)$ wird entsprechend als $\{\nu \in \mathcal{M}(G) : \hat{\nu}(\gamma) = 0 \text{ für } \gamma \notin E\}$ definiert.

Zur Vereinfachung der Formulierungen einiger Aussagen werden wir manchmal $L^\infty_E(G)$ anstelle von $C_E(G)$ schreiben.

Für ein $a \in G$ und $\mu \in \mathcal{M}(G)$ wird durch $\mu_a(B) := \mu(B - a)$ $(B \in \mathfrak{B}(G))$ ein $\mu_a \in \mathcal{M}(G)$ definiert. Daraus resultiert der Translationsoperator $\tau_a : \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(G); \mu \mapsto \mu_a$. Ein Unterraum X von $\mathcal{M}(G)$ heisst translationsinvariant, wenn für jedes $\mu \in X$ auch $\mu_a \in X$ gilt.

Im folgenden Satz sind einige Aussagen über translationsinvariante Räume zusammengestellt.

1.4.12 Satz *(i) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist $L^p_E(G)$ translationsinvariant, und $\tau_a : L^p_E(G) \to L^p_E(G)$ ist eine Isometrie.*

(ii) Alle translationsinvarianten Unterräume von $L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ bzw. von $C(G)$ sind von der Form $L^p_E(G)$ bzw. $C_E(G)$ für ein $E \subset \Gamma$.

Beweis Da (i) direkt aus den Eigenschaften des Haarmasses folgt, wenden wir uns direkt (ii) zu.

(ii) Sei $1 \leq p < \infty$, $X \subset L^p(G)$. Setze $E := \bigcup_{f \in X}\{\gamma \in \Gamma : \hat{f}(\gamma) \neq 0\}$. Nach Definition ist X in $L^p_E(G)$ enthalten. Für die umgekehrte Inklusion wähle ein beliebiges $\gamma \in E$. Dann existiert ein $f \in X$, so dass $\hat{f}(\gamma) \neq 0$. Wegen der Translationsinvarianz von X ist f_a für jedes $a \in G$ ebenfalls in X enthalten. Für ein beliebiges $y \in G$ bilde $g^y := (\gamma|y)f_y \in X$. Damit definieren wir eine Abbildung $T : G \to X; y \mapsto g^y$. Wegen

$$\begin{aligned}
\|g^x - g^y\|_p &= \|(\gamma|x)f_x - (\gamma|x)f_y\|_p \\
&\leq \|((\gamma|x) - (\gamma|y))f_x\|_p + \|(\gamma|y)(f_x - f_y)\|_p \\
&= |(\gamma|x) - (\gamma|y)|\|f_x\|_p + \|f_x - f_y\|_p|(\gamma|y)|
\end{aligned}$$

und [10] 5.7 ist T stetig. Da X abgeschlossen ist, liegt $g := \int_G T(y)dm_G(y)$ in X. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
g(x) &= (\int_G T(y)dm_G(y))(x) = \int_G T(y)(x)dm_G(y) = \int_G g^y(x)dm_G(y) \\
&= \int_G f_y(x)(\gamma|y)dm_G(y) = \int_G f(x-y)(\gamma|y)dm_G(y) = \int_G f(-y)(\gamma|x+y)dm_G(y) \\
&= (\gamma|x)\int_G f(y)(\gamma|-y)dm_G(y) = (\gamma|x)\hat{f}(\gamma).
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\gamma = \frac{1}{\hat{f}(\gamma)}\hat{f}(\gamma)\gamma = \frac{1}{\hat{f}(\gamma)}g \in X.$$

■

Für spätere Zwecke führen wir noch Translationsoperatoren auf Quotienten von translationsinvarianten Räumen ein. Seien dazu X ein translationsinvarianter Raum, Y ein translationsinvarianter Unterraum von X und $a \in G$. Weil für $f, g \in X$ aus $f - g \in Y$ auch $\tau_a f - \tau_a g = \tau_a(f-g) \in Y$ ist, existiert ein Operator $\tau : X/Y \to X/Y$ mit $q_Y\tau_a = \tau q_Y$, wobei $q_Y : X \to X/Y$ die Quotientabbildung bezeichnet. Auch diesen Operator bezeichnen wir mit τ_a.

1.4.13 Satz *Seien $a \in G$, X ein translationsinvarianter Raum und Y ein translationsinvarianter Unterraum.*

(i) Für die Translationsoperatoren τ_a $(a \in G)$ auf $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$ und $C(G)$ gilt $\tau_a^* = \tau_{-a}$.

(ii) $Y^\perp$ ist ein translationsinvarianter Unterraum von von X^*.

(iii) Der adjungierte Operator von $\tau_a : Y \to Y$ stimmt mit $\tau_{-a} : X^*/Y^\perp \to X^*/Y^\perp$ überein.

Beweis (i) Wir behandeln zuerst den Fall $L^p(G)$ $(1 < p < \infty)$. Für $\in L^{p^*}(G)$ und $g \in L^p(G)$ gilt

$$\langle \tau_a^*(f), g\rangle = \langle f, \tau_a(g)\rangle = \int_G f(x)g(x-a)dm_G(x) = \int_G f(x+a)g(x)dm_G(x) = \langle \tau_{-a}(f), g\rangle.$$

Ebenso erhalten wir für $\mu \in \mathcal{M}(G)$ und $g \in C(G)$

$$\langle \tau_a^*(\mu), g\rangle = \langle \mu, \tau_a(g)\rangle = \int_G f(x-a)d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu_{-a}(x) = \langle \tau_{-a}(\mu), g\rangle.$$

(ii) Dies folgt sofort aus $\langle \tau_a x^*, y\rangle = \langle x^*, \tau_{-a}(y)\rangle = 0$ für $x^* \in Y^\perp \subset X^*$, $y \in Y$ und $a \in G$.

(iii) Sei $\hat{x} \in X^*/Y^\perp$ und $y \in Y$. Wegen

$$\langle \tau_a^*(\hat{x}), y\rangle = \langle \hat{x}, \tau_a(y)\rangle = \langle x, \tau_a(y)\rangle = \langle \tau_{-a}(x), y\rangle = \langle \tau_{-a}(\hat{x}), y\rangle$$

folgt die Behauptung. ■

Einen Unterraum Z eines Quotienten X/Y von translationsinvarianten Räumen X und Y nennen wir translationsinvariant, wenn für jedes $x \in Z$ und $a \in G$ auch $\tau_a(x)$ in Z liegt.

Translationsinvariante Operatoren

Seien in diesem Teil X und Y translationsinvariante Banachräume von Abbildungen auf G. Ein Operator $u : X \to Y$ heisst **translationsinvariant**, wenn $\tau_a u = u\tau_a$ für jedes $a \in G$ gilt. Ist $\mathcal{A}(X, Y)$ ein Raum von linearen Operatoren von X nach Y, so bezeichnet

$$\mathcal{A}^{inv}(X, Y)$$

den Unterraum der translationsinvarianten Operatoren in $\mathcal{A}(X, Y)$. Diese Bezeichnung benutzen wir insbesondere für Banachideale. Der folgende Satz zeigt, dass obige Räume abgeschlossen sind bzgl. der jeweiligen Norm.

1.4.14 Satz *Seien X und Y translationsinvariante Räume und $(u_n)_n$ eine Folge von translationsinvarianten Operatoren, die in der Operatorennorm gegen einen Operator u konvergieren. Dann ist u ebenfalls translationsinvariant.*

Beweis Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $\|u - u_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für diese n und für ein beliebiges $a \in G$ gilt dann wegen $\tau_a u_n = u_n \tau_a$

$$\|\tau_a u - u\tau_a\| \leq \|\tau_a u - \tau_a u_n\| + \|u_n \tau_a - u\tau_a\| \leq \|\tau_a\| \, \|u - u_n\| + \|u_n - u\| \, \|\tau_a\| \leq \varepsilon.$$

Damit folgt $\tau_a u = u\tau_a$ für jedes a aus G, d.h. u ist translationsinvariant. ■

Typische Beispiele für translationsinvariante Operatoren sind die Faltungsoperatoren, die ich nun vorstellen möchte.

1.4.15 Satz *Seien $E \subset \Gamma$ und $1 \leq p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) Für jedes $f \in L^p_E(G)$ ist $u_f : L^1(G) \to L^p_E(G) : g \mapsto g * f$ wohldefiniert, linear, stetig und translationsinvariant, und es gilt $\|u_f\| \leq \|f\|_p$.

(ii) Für jedes $\mu \in \mathcal{M}_E(G)$ ist $u_\mu : L^1(G) \to L^1_E(G) : g \mapsto g * \mu$ wohldefiniert, linear, stetig und translationsinvariant, und es gilt $\|u_\mu\| = \|\mu\|$.

(iii) Für jedes $f \in L^p_E(G)$ ist $u_f : L^q(G) \to C_E(G) : g \mapsto g * f$ wohldefiniert, linear, stetig und translationsinvariant, und es gilt $\|u_f\| \leq \|f\|_p$.

Alle Aussagen ergeben sich direkt aus 1.4.3. Für (ii) vergleiche auch [17] C2.8.2.

Operatoren, wie sie im vorhergehenden Satz eingeführt wurden, nennt man **Faltungsoperatoren**.

1.4.16 Lemma *Sei $\gamma \in \Gamma$, $f \in L^1(G)$ und $\mu \in \mathcal{M}(G)$. Dann gelten:*

(i) $u_\gamma(f) = \hat{f}(\gamma)\gamma$.

(ii) $u_\mu(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)\gamma$.

Beweis Für $x \in G$ gilt

$$u_\gamma(\mu)(x) = (\gamma * \mu)(x) = (\mu * \gamma)(x) = u_\mu(\gamma)(x).$$

Weiter ist

$$(\mu * \gamma)(x) = \int_G (\gamma|x - y) d\mu(y) = (\gamma|x) \int_G (\gamma|-y) d\mu(y) = (\gamma|x)\hat{\mu}(\gamma),$$

woraus sich sofort die Behauptung ergibt. ■

Wir wollen nun zeigen, dass zwischen gewissen Räumen alle translationsinvarianten Operatoren bereits Faltungsoperatoren sind. Dazu benötigen wir den folgenden Satz, dessen Beweis man in [16] Theorem 1.1 findet.

1.4.17 Satz *Seien $\mu \in \mathcal{M}(G)$ und $u_\mu : L^1(G) \to L^1(G)$ der zugehörige Faltungsoperator. Dann sind äquivalent:*

(i) u_μ ist kompakt.

(ii) u_μ ist schwach kompakt.

(iii) μ ist absolutstetig bezüglich m_G.

Wir kommen nun zur angekündigten Aussage.

1.4.18 Satz *Seien $1 \leq p < \infty$ und $E \subset \Gamma$. Dann gilt:*

(i) Die Abbildung $\mu \mapsto u_\mu$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{M}_E(G)$ auf $\mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^1_E(G))$.

(ii) Die Abbildung $f \mapsto u_f$ ist ein Isomorphismus von $L^p_E(G)$ auf $\mathcal{K}^{inv}(L^1(G), L^p_E(G))$.

(iii) Für $1 < p < \infty$ gilt $\mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^p_E(G)) = \mathcal{K}^{inv}(L^1(G), L^p_E(G))$.

Beweis (i) Wegen 1.4.15(ii) ist der Operator u_μ mit Bild in $L^1(G)$ wohldefiniert. Aus 1.4.16(ii) folgt, dass das Bild von u_μ in $L^1_E(G)$ liegt. Als nächstes beweisen wir die Injektivität. Sei also $u_\mu = 0$. Dann gilt

$$\hat{\mu}(\gamma) = \mu * \gamma = u_\mu(\gamma) = 0.$$

Wegen der Injektivität der Fouriertransformation folgt $\mu = 0$. Wegen [17] 3.8.4 existiert zu $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^1_E(G))$ ein Mass $\mu \in \mathcal{M}(G)$, so dass $u = u_\mu$. Nehmen wir an, dass $\mu \notin \mathcal{M}_E(G)$, so existiert ein $\gamma_0 \in \Gamma \setminus E$ mit $\hat{\mu}(\gamma_0) \neq 0$. Dann gilt

$$u_\mu(\gamma_0) = \mu * \gamma_0 = \hat{\mu}(\gamma_0) \neq 0.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung.

(ii) Der Fall $p = 1$ ergibt sich direkt aus 1.4.17 und (i). Für $p > 1$ bleibt wegen (i) nur noch zu zeigen, dass für einen Faltungsoperator u_f mit Bild in $L^p_E(G)$ auch f in $L^p_E(G)$ liegt. Wähle dazu eine approximiernde Einheit (h_U) (vgl. Seite 16). Damit erhalten wir

$$\|f - u_f(h_U)\|_p = \|f - f * h_U\|_p.$$

Wegen 1.4.5 liegt damit f in $L^p_E(G)$.

(iii) Sei $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^p_E(G))$. Da $L^p_E(G)$ reflexiv ist, folgt dass u schwach kompakt und wegen 1.4.17 sogar kompakt ist. ∎

1.4.19 Satz *Seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^p_E(G), L^q(G))$ und $\gamma \in E$. Dann gilt*

$$u\gamma = (u\gamma)(0)\gamma.$$

Beweis Seien $\gamma' \in \Gamma$ und $y \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{u\gamma}(\gamma') &= \int_G (u\gamma)(x)(\gamma'|-x)dm_G(x) = \int_G (u(\gamma_y))_{-y}(x)(\gamma'|-x)dm_G(x) \\
&= \int_G u(\gamma_y)(x+y)(\gamma'|-x)dm_G(x) = \int_G u((\gamma|-y)\gamma)(x+y)(\gamma'|-x)dm_G(x) \\
&= \int_G u((\gamma|-y)\gamma)(x)(\gamma'|-x+y)dm_G(x) = \int_G u(\gamma)(x)(\gamma|-y)(\gamma'|-x)(\gamma'|y)dm_G(x) \\
&= \int_G u(\gamma)(\gamma'-\gamma|y)(\gamma'|-x)dm_G(x) = (\gamma'-\gamma|y)\int_G u(\gamma)(x)(\gamma'|-x)dm_G(x) \\
&= (\gamma'-\gamma|y)\widehat{u\gamma}(\gamma'),
\end{aligned}$$

d.h. es ist

$$\widehat{u\gamma}(\gamma') = \widehat{u\gamma}(\gamma')\delta_{\gamma\gamma'}.$$

Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $u\gamma = \lambda\gamma$. Aus $(u\gamma)(0) = \lambda(\gamma|0) = \lambda$ folgt die Behauptung. ■

Die Werte $u(\gamma)(0)$ werden **Fourierkoeffizienten des Operators** u genannt; wir bezeichnen sie mit $\hat{u}(\gamma)$. Wir haben gerade gesehen, dass die Gleichung $u(\gamma) = \hat{u}(\gamma)\gamma$ gilt.

Im folgenden Satz sind einige Eigenschaften dieser Fourierkoeffizienten zusammengestellt.

1.4.20 Satz *Seien $E \subset \Gamma$, $X, Y, Z \in \{L^p_E(G), C_E(G)\}$ sowie $\gamma \in \Gamma$.*

(i) Für translationsinvariante Operatoren $u : Y \to Z$ und $v : X \to Y$ gilt: $\widehat{uv}(\gamma) = \hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)$.

(ii) Für $\mu \in \mathcal{M}(G)$ gilt $\hat{u}_\mu(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)$.

Beweis (i) Die Behauptung ergibt sich sofort aus

$$\widehat{uv}(\gamma)\gamma = (uv)(\gamma) = u(v(\gamma)) = u(\hat{v}(\gamma)\gamma) = \hat{v}(\gamma)u(\gamma) = \hat{v}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\gamma.$$

(ii) In Lemma 1.4.16 haben wir $u_\mu(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)\gamma$ gezeigt, d.h. es gilt $\hat{u}_\mu(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma)$. ■

1.4.21 Lemma *Seien $E \subset \Gamma$, $v : Trig \to Trig_E$, $h \in L^p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$, $\mu \in \mathcal{M}(G)$ und $f \in Trig$. Dann gelten*

$$v(h * f) = h * v(f)$$

und

$$v(\mu * f) = \mu * v(f).$$

Beweis Im ersten Fall erhält man

$$\begin{aligned}
v(h*f) &= v(h*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\gamma)) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(h*\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(\hat{h}(\gamma)\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{h}(\gamma)v(\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{h}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{v}(\gamma)h*\gamma \\
&= h*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\gamma) = h*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(\gamma)) = h*v(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\gamma) \\
&= h*v(f).
\end{aligned}$$

Im zweiten Fall folgt ebenso

$$\begin{aligned}
v(\mu*f) &= v(\mu*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\gamma)) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(\mu*\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(\hat{\mu}(\gamma)\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{\mu}(\gamma)v(\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{\mu}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\mu*\gamma \\
&= \mu*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\gamma) = \mu*(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)v(\gamma)) = \mu*v(\sum_{\gamma\in\Gamma}\hat{f}(\gamma)\gamma) \\
&= \mu*v(f).
\end{aligned}$$

■

1.5 Averaging-Technik

In diesem Teil lernen wir eine Methode kennen, mit der wir aus Eigenschaften von translationsinvarianten Operatoren auf solche von beliebigen Operatoren schliessen können.

1.5.1 Satz *Seien X und Y translationsinvariante Räume und $u \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Dann wird durch $\tilde{u}(f) = \int_G \tau_{-a}u\tau_a(f)dm_G(a)$ ein Operator $\tilde{u} \in \mathfrak{L}^{inv}(X,Y)$ mit $\|\tilde{u}\| \le \|u\|$ definiert. Ist u bereits translationsinvariant, so gilt $\tilde{u} = u$.*

Beweis Wähle ein beliebiges $f \in X$. Wir übernehmen aus [10] 5.7 bzw. [18] 5.13a), dass die Abbildungen $\tau_f : G \to X; a \mapsto f_a$ stetig sind. Konvergiere nun (b_n) in G gegen a. Dann gilt

$$\|\tau_{-a}u\tau_a(f) - \tau_{-b_n}u\tau_{b_n}(f)\| \le \underbrace{\|\tau_{-a}\|}_{=1}\|u\|\underbrace{\|(\tau_a - \tau_{b_n})(f)\|}_{\to 0} + \underbrace{\|(\tau_{-a} - \tau_{-b_n})(u\tau_{b_n}(f))\|}_{\to 0} \to 0.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die Abbildung $v_f : G \to Y; a \mapsto (\tau_{-a}u\tau_a)(f)$ stetig ist. Insbesondere ist v_f schwach m_G-messbar und wegen der Separabilität sogar messbar (vgl. [3] II.1.2). Weiter rechnet man

$$\int_G \|\tau_{-a}u\tau_a(f)\|dm_G(a) \le \int_G \|\tau_{-a}\|\,\|u\|\,\|\tau_a\|\,\|f\|dm_G(a) = \|u\|\,\|f\|.$$

Somit ist die lineare Abbildung $\tilde{u} : X \to Y; f \mapsto \int_G \tau_{-a} u \tau_a(f) dm_G(a)$ wohldefiniert und stetig mit $\|\tilde{u}\| \le \|u\|$. Es bleibt nur noch die Translationsinvarianz zu zeigen. Für beliebige $b \in G$ und $f \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{u}\tau_b(f) &= \tilde{u}(\tau_b(f)) = (\int_G \tau_{-a} u(\tau_a(\tau_b(f))) dm_G(a)) = \int_G \tau_{-a} u \tau_a \tau_b(f) dm_G(a) \\ &= \int_G \tau_{-a} u \tau_{a+b}(f) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a+b} u \tau_a(f) dm_G(a) = \tau_b \int_G \tau_{-a} u \tau_a(f) dm_G(a) \\ &= \tau_b \tilde{u}(f).\end{aligned}$$

Sei nun u translationsinvariant. Für $f \in X$ gilt

$$\tilde{u}(f) = \int_G \tau_{-a} u \tau_a(f) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a} \tau_a u(f) dm_G(a) = \int_G u(f) dm_G(a) = u(f). \qquad \blacksquare$$

Wir bezeichnen den im vorhergehenden Satz konstruierten Operator mit

$$u_{av}.$$

1.5.2 Satz *Seien X, Y, Z translationsinvariante Räume, $v \in \mathfrak{L}^{inv}(X, Y)$ und $w \in \mathfrak{L}(Y, Z)$, so gelten*

(i) $(wv)_{av} = w_{av} v$,

(ii) $(w_{av})^* = (w^*)_{av}$.

Beweis Aus

$$w_{av} v(f) = \int_G \tau_{-a} w \tau_a(vf) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a} wv(\tau_a(f)) dm_G(a) = (wv)_{av}(f).$$

ergibt sich sofort die erste Behauptung. Die zweite folgt aus

$$\langle (w_{av})^* f, g\rangle = \langle f, w_{av} g\rangle = \int_G \langle f, \tau_a w \tau_{-a} g\rangle dm_G(a) = \int_G \langle \tau_a w^* \tau_{-a} f, g\rangle dm_G(a) = \langle (w^*)_{av} f, g\rangle$$

für $f \in Z^*$ und $g \in Y$. $\blacksquare$

1.5.3 Satz *Für translationsinvariante Räume X, Y und $u \in \mathcal{F}(X, Y)$ gilt* $\operatorname{tr} u_{av} = \operatorname{tr} u$.

Beweis Wähle eine Darstellung $u = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes x_i$ mit $x_i^* \in X^*$ und $x_i \in Y$ für $1 \le i \le n$. Dann gilt für $f \in X$

$$\begin{aligned}u_{av}(f) &= \int_G \tau_{-a}(\sum_{i=1}^n x_i^* \otimes x_i)\tau_a(f) dm_G(a) = \sum_{i=1}^n \int_G \tau_{-a}(x_i^*(\tau_a(f))x_i) dm_G(a) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_G x_i^* \circ \tau_a(f) \tau_{-a}(x_i) dm_G(a) = \sum_{i=1}^n \int_G x_i^* \otimes \tau_{-a} x_i(f) m_G(a)\end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Spur können wir ohne Einschränkung $n = 1$ annehmen, d.h. $u = x^* \otimes x$ und $u_{av} = \int_G x^* \otimes x dm_G(a)$. Wir setzen $M : G \to X^*; a \mapsto x^*\tau_a$ und $F : G \to X; a \mapsto \tau_{-a}x$. Unter Verwendung der kanonischen Dualität $L^2(G, X^*) \cong L^2(G, X)^*$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((x^* \otimes x)_{av}) &= \operatorname{tr}(\int_G x^* \otimes x dm_G(a)) = \operatorname{tr}(M \otimes F) = \langle M, F\rangle = \int_G \langle M(a), F(a)\rangle dm_G(a) \\ &= \int_G \langle x^*\tau_a, \tau_{-a}x\rangle dm_G(a) = \int_G \langle x^*, x\rangle dm_G(a) = \langle x^*, x\rangle = \operatorname{tr}(x^* \otimes x),\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ∎

In 1.5.1 haben wir inbesondere bewiesen, dass die Abbildung

$$\mathfrak{L}(L^p_E(G), L^q_F(G)) \to \mathfrak{L}(L^p_E(G), L^q_F(G)); u \mapsto u_{av}$$

eine Projektion mit Bild $\mathfrak{L}^{inv}(L^p_E(G), L^q_F(G))$ ist. Im folgenden Satz sehen wir, dass dies auch für weitere Banachideale gilt.

1.5.4 Satz *Seien $E, F \subset \Gamma$ und X und Y translationsinvariante Räume.*

(i) Ist $u \in \Pi_1(X, Y)$, dann ist $u_{av} \in \Pi_1^{inv}(X, Y)$, und es gilt $\pi_1(u_{av}) \leq \pi_1(u)$.

(ii) Ist $u \in \mathcal{N}_1(C_E(G), L^2_F(G))$, dann ist $u_{av} \in \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2_F(G))$, und es gilt $\nu_1(u_{av}) \leq \nu_1(u)$.

(iii) Ist $u \in \mathcal{F}(C_E(G), L^2_F(G))$, dann ist $u_{av} \in \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2_F(G))$, und es gilt $\gamma_1(u_{av}) \leq \gamma_1(u)$.

Beweis (i) Sei $\mu \in \mathcal{M}(G)$ ein Pietsch-Mass auf $B_{C_E^*}$ und seien $f_1, \dots f_n \in C_E(G)$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \|u_{av} f_i\| &= \sum_{i=1}^n \| \int_G \tau_a(u(\tau_{-a} f_i)) dm_G(a)\| \leq \sum_{i=1}^n \int_G \|\tau_a(u(\tau_{-a} f_i))\| dm_G(a) \\ &= \int_G \sum_{i=1}^n \|\tau_a(u(\tau_{-a} f_i))\| dm_G(a) \leq \pi_1(u) \int_G \sup_{g \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle g, \tau_a f_i\rangle| dm_G(a) \\ &= \pi_1(u) \int_G \sup_{g \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle \tau_{-a} g, f_i\rangle| dm_G(a) = \pi_1(u) \sup_{g \in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |\langle g, f_i\rangle| dm_G(a).\end{aligned}$$

Daraus folgt direkt die erste Behauptung.

(ii) Sei $u : C_E(G) \to L^2_F(G)$ 1-nuklear. Dann existiert eine Faktorisierung $u = aM_\lambda b$ mit Operatoren $a : l_1 \to L^2_F(G)$, $b : C_E(G) \to l_\infty$ und einem Multiplikationsoperator $M_\lambda : l_\infty \to l_1$ zu einer Folge $\lambda = (\lambda_n) \in l_1$. Wegen der Injektivität von l_∞ existiert ein Operator $\tilde{b} : C(G) \to l_\infty$, der b erweitert mit $\|\tilde{b}\| = \|b\|$. Dann ist auch $\tilde{u} := aM_\lambda\tilde{b}$ 1-nuklear. Wegen

1.3.6(vii) und 1.3.6(viii) ist $\tilde{u}$ 1-summierend, und es gilt $\nu_1(\tilde{u}) = \pi_1(\tilde{u})$. Wegen (i) ist $\tilde{u}_{av}$ 1-summierend mit $\nu_1(\tilde{u}_{av}) = \pi_1(\tilde{u}_{av}) \leq \pi_1(\tilde{u}) = \nu_1(\tilde{u})$. Für $\gamma \in E$ erhält man

$$\tilde{u}_{av}(\gamma) = \int_G \tau_{-a}\tilde{u}\tau_a(\gamma)dm_G(a) = \int_G \tau_{-a}u\tau_a(\gamma)dm_G(a) = u_{av}(\gamma).$$

Somit gilt $u_{av} = \tilde{u}_{av}k_E$. Damit ist u_{av} 1-nuklear mit

$$\nu_1(u_{av}) \leq \nu_1(\tilde{u}_{av}) = \pi_1(\tilde{u}_{av}) \leq \pi_1(\tilde{u}) = \nu_1(\tilde{u}) \leq \|\tilde{b}\|\,\|M_\lambda\|\,\|a\| = \|b\|\,\|M_\lambda\|\,\|a\|.$$

Da dies für alle Faktorisierungen von u gilt, folgt $\nu_1(u_{av}) \leq \nu_1(u)$.

(iii) Wegen (ii) ist u_{av} L_1-faktorisierbar. Für die Normabschätzung sei $v \in \mathcal{F}(L^2_F(G), C_E(G))$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(vu_{av}) &= \operatorname{tr}(u_{av}v) = \operatorname{tr}(u_{av}v_{av}) = \operatorname{tr}(v_{av}u_{av}) = \operatorname{tr}(v_{av}u) \leq \pi_1^d(v_{av})\gamma_1(u) \\ &= \pi_1((v_{av})^*)\gamma_1(u) = \pi_1((v^*)_{av})\gamma_1(u) \leq \pi_1(v^*)\gamma_1(u) = \gamma_1(u)\pi_1^d(v). \end{aligned}$$

Somit gilt $\gamma_1(u_{av}) \leq \gamma_1(u)$. ■

2 Translationsinvariante Operatoren und die duale Gruppe

In der Folge werden wir gegebene Operatoren häufig durch natürliche Inklusionsabbildungen faktorisieren oder modifizieren. Letztere erhalten darum spezielle Symbole, nämlich (für $E \subset \Gamma$ und $1 \leq p < \infty$)

(i) $i_{p,E} : C_E(G) \hookrightarrow L^p_E(G)$,

(ii) $j_{p,E} : C_E(G) \hookrightarrow L^p(G)$,

(iii) $k_{p,E} : L^p_E(G) \hookrightarrow L^p(G)$,

(iv) $k_{p,q,E} : L^p_E(G) \hookrightarrow L^q_E(G)$,

(v) $i_p : L^\infty(G) \hookrightarrow L^p(G)$,

(vi) $j_p : C(G) \hookrightarrow L^p(G)$,

(vii) $k_E : C_E(G) \hookrightarrow C(G)$,

(viii) $i_{p,q,E} : L^p_E(G) \hookrightarrow L^q_E(G)$.

Beachte, dass der Operator $i_{p,E}$ p-summierend ist.

2.1 Operatoren zwischen translationsinvarianten Räumen

Sei $\mu \in \mathcal{M}(G)$. Dann bezeichne μ' im ganzen Kapitel das Mass, welches durch $\mu'(A) := \mu(-A)$ für $A \in \mathfrak{B}(G))$ definiert wird. Analog wird für eine Funktion f eine weitere Funktion f' durch $f'(x) = f(-x)$ definiert. Sofort sieht man $\|\mu'\| = \|\mu\|$ und $\|f'\|_p = \|f\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$). Wegen der Inversionsinvarianz des Haarmasses gilt ferner $\int_G f(x)dm_G(x) = \int_G f'(x)dm_G(x)$.

2.1.1 Lemma *Sei $1 \leq p < \infty$, $E, F \subset \Gamma$, $u \in \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^p_F(G))$. Genau dann ist u in $\mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^p_F(G))$, wenn ein φ in $L^p_F(G)$ existiert, so dass $u(g) = \varphi * g$ für jedes g in $C_E(G)$. In diesem Fall gilt mit einer von u unabhängigen Konstanten $K > 0$*

$$\nu_1(u) \leq \iota_1(j_1)\|\varphi\|_p \leq K\nu_1(u).$$

Beweis „$\Leftarrow$“ Die Voraussetzung bedeutet die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} C(G) \arrow[r, "j_1"] & L^1(G) \arrow[d, "u_\varphi"] \\ C_E(G) \arrow[u, "k_E"] \arrow[r, "u"] & L^p_F(G) \end{tikzcd}$$

Nach Definition ist j_1 1-integral. Wegen der Kompaktheit von u_φ (1.4.18) sind $u_\varphi j_1$ und dann $u = u_\varphi j_1 k_E$ 1-nuklear. Für die Normen gilt dabei

$$\nu_1(u) \leq \|k_E\| \nu_1(u_\varphi j_1) \leq \|u_\varphi\| \iota_1(j_1) \leq \|\varphi\|_p \iota_1(j_1).$$

„⇒" Sei $g \in L^p_F(G)$ und $\mu \in \mathcal{M}(G)$. Definiere damit

$$v_{\mu,g} : C(G) \to L^p_F(G); f \mapsto (\int_G f(x) d\mu(x)) g.$$

Wegen $C(G) \subset L^1(G)$ ist dies wohldefiniert. Offensichtlich ist $v_{\mu,g}$ linear. Aus

$$\begin{aligned}\|v_{\mu,g}(f)\|_p &= (\int_G |\int_G f(x) d\mu(x) g(y)|^p dm_G(y))^{1/p} \leq (\int_G (\int_G |f(x)| d\mu(x))^p |g(y)|^p dm_G(y))^{1/p} \\ &= \int_G |f(x)| d\mu(x) (\int_G |g(y)|^p dm_G(y))^{1/p} \leq \|f\|_\infty \mu(G) \|g\|_p\end{aligned}$$

folgt, dass $v_{\mu,g}$ stetig ist mit $\|v_{\mu,g}\| \leq \|\mu\| \, \|g\|_p$.

Sei nun $w_{\mu,g} := (v_{\mu,g})_{av}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}w_{\mu,g}(f) &= \int_G (\tau_{-a} v_{\mu,g} \tau_a)(f) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a}(v_{\mu,g}(f_a)) dm_G(a) \\ &= \int_G \tau_{-a}(\int_G f(x-a) d\mu(x) g) dm_G(a) = \int_G \int_G f(x-a) d\mu(x) g_{-a} dm_G(a).\end{aligned}$$

Seien $f \in L^1(G)$ und $\mu \in \mathcal{M}(G)$ ein Mass. Dann ist $(\mu' * g) * f$ wohldefiniert, und es gilt:

$$\begin{aligned}((\mu' * g) * f)(y) &= \int_G (\mu' * g)(y-a) f(a) dm_G(a) \\ &= \int_G \int_G g(y-a-x) d\mu'(x) f(a) dm_G(a) \\ &= \int_G \int_G g(y-a-x) f(a) d\mu'(x) dm_G(a) \\ &= \int_G \int_G g(y-a-x) f(a) dm_G(a) d\mu'(x) \\ &= \int_G \int_G g(y+a-x) f(-a) dm_G(a) d\mu'(x) \\ &= \int_G \int_G g(y+a) f(-a-x) dm_G(a) d\mu'(x) \\ &= \int_G \int_G f(-a-x) d\mu'(x) g(y+a) dm_G(a) \\ &= \int_G \int_G f(x-a) d\mu(x) g_{-a}(y) dm_G(a).\end{aligned} \tag{2}$$

Wir haben dabei den Satz von Fubini und die Translations- und Inversionsinvarianz des Integrals benutzt. Aus 1.4.3(iv) folgt $\mu' * g \in L^p_F(G)$ und

$$\|\mu' * g\|_p \leq \|\mu'\| \, \|g\|_p = \|\mu\| \, \|g\|_p. \tag{3}$$

Sei nun $u \in \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L_F^p(G))$. Dann hat u eine Darstellung der Form

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^* \otimes g_j,$$

wobei $x_j^* \in (C_E(G))^*, g_j \in L_F^p(G)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ sind und $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\| \, \|g_j\|_p =: C < \infty$. Zu den x_j^* existieren Hahn-Banach-Erweiterungen $\mu_j \in \mathcal{M}(G) = C(G)^*$ mit $\|\mu_j\| = \|x_j^*\|$. Setze $v_j := v_{\mu_j, g_j}$, $w_j := w_{\mu_j, g_j}$ für $j \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \|\mu_j' * g_j\|_p \underset{(3)}{\leq} \sum_{j=1}^{k} \|\mu_j\| \, \|g_j\|_p = \sum_{j=1}^{k} \|x_j^*\| \, \|g_j\|_p \leq C.$$

Damit existiert $\varphi := \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j' * g_j$ in $L_F^p(G)$. Wir behaupten nun, dass dieses φ unsere Anforderungen erfüllt. Für ein $f \in C_E(G)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} u_\varphi(f) = \varphi * f = (\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j' * g_j) * f = \sum_{j=1}^{\infty} ((\mu_j' * g_j) * f) \\ \underset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} (\int_G \int_G f(x-a) d\mu_j(x) (g_j)_{-a} dm_G(a)) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(f). \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir wegen der Translationsinvarianz von u

$$\begin{aligned} u(f) = u_{av}(f) &= \int_G (\tau_{-a} u \tau_a)(f) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a} (\sum_{j=1}^{\infty} \langle x_j^*, \tau_a(f) \rangle g_j) dm_G(a) \\ &= \int_G \tau_{-a} (\sum_{j=1}^{\infty} \langle \mu_j, \tau_a(f) \rangle g_j) dm_G(a) = \int_G \tau_{-a} (\sum_{j=1}^{\infty} \int_G f_a(x) d\mu(x) g_j) dm_G(a) \\ &= \int_G \tau_{-a} (\sum_{j=1}^{\infty} v_j(\tau_a(f))) dm_G(a) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_G (\tau_{-a} v_j \tau_a)(f) dm_G(a) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(f). \end{aligned}$$

Wir müssen noch die zweite Ungleichung zeigen. Aus dem ersten Teil folgt, dass die Abbilung

$$\Phi : L_F^p(G) \to \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L_F^p(G)); \varphi \mapsto u_\varphi$$

wohldefiniert ist.Offensichtlich ist Φ linear und wegen der bereits bewiesenen Ungleichung stetig. Wegen 1.4.18 ist Φ injektiv und die Surjektivität folgt ebenfalls aus dem ersten Teil. Die fehlende Ungleichung ist somit eine Konsequenz aus dem Graphensatz. ■

2.1.2 Lemma *Seien $0 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq r < \infty$ und $E \subset \Gamma$. Dann gilt für jeden Operator $u \in \Pi_p^{inv}(L_E^r(G), L^q(G))$ und jedes $f \in L_E^r(G)$ die Ungleichung*

$$\int_G \|uf_{-a}\|_q^p dm_G(a) \leq \pi_p(u)^p \sup_{x^* \in B_{(L_E^r(G))^*}} \int_G |\langle x^*, f_{-a} \rangle|^p dm_G(a).$$

Beweis Da u p-summierend ist, existiert wegen des Dominanzsatzes von Pietsch (1.3.3) ein reguläres Wahrscheinlichkeitsmass μ auf $K := B_{(L^r_E(G))^*}$, so dass für jedes $f \in L^r_E(G)$

$$\|uf\|_q^p \leq \pi_p(u)^p \int_K |\langle x^*, f\rangle|^p d\mu(x^*)$$

gilt. Setzen wir für f die Funktionen f_a $(a \in G)$ ein und integrieren bezüglich des Haarmasses, so erhalten wir unter Beachtung des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}\int_G \|uf_{-a}\|_q^p dm_G(a) &\leq \int_G \pi_p(u)^p \int_K |\langle x^*, f_{-a}\rangle|^p d\mu(x^*) dm_G(a)\\ &= \pi_p(u)^p \int_K \int_G |\langle x^*, f_{-a}\rangle|^p dm_G(a) d\mu(x^*)\\ &\leq \pi_p(u)^p sup_{x^*\in K} \int_G |\langle x^*, f_{-a}\rangle|^p dm_G(a),\end{aligned}$$

und dies ist die behauptete Ungleichung. ■

Seien μ ein endliches Mass auf einer Menge Ω und $0 < p, q < \infty$. Eine lineare Abbildung u zwischen Räumen X und Y von (μ-Äquivalenzklassen von) messbaren $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf Ω hat **Typ** (p, q), wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $\|uf\|_q \leq C\|f\|_p$ für jedes $f \in X$. Dabei setzen wir $\|f\|_p = \infty$ für $f \in X \backslash L^p(\mu)$. Es folgt $u(X \cap L^p(\mu)) \subset L^q(\mu)$, und die Einschränkung $u : X \cap L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ ist stetig, wenn man $X \cap L^p(\mu)$ mit $\|\cdot\|_p$ und Y mit $\|\cdot\|_q$ versieht. Liegt $X \cap L^p(\mu)$ in $L^p(\mu)$ dicht, so kann u eindeutig zu einem stetigen Operator $u : L^p(\mu) \to L^q(\mu)$ erweitert werden. Die Norm dieses Operators wird mit $\|u\|_{p,q}$ bezeichnet.

2.1.3 Lemma *Seien $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $E, F \subset \Gamma$ und $u \in \mathfrak{L}(C_E(G), L^q_F(G))$. Ein translationsinvarianter Operator $u : C_E(G) \to L^q_F(G)$ ist genau dann p-summierend, wenn er vom Typ (p, q) ist. Dann gilt $\|u\|_{p,q} \leq \pi_p(u)$.*

Beweis „$\Leftarrow$“ Sei u translationsinvariant und vom Typ (p, q). Damit kann u zu einem Operator $\tilde{u} : L^p_E(G) \to L^q_E(G)$ erweitert werden, d.h. es gilt $u = \tilde{u} i_{p,E}$. Mit $i_{p,E}$ ist auch u p-summierend.
„$\Rightarrow$“ Wegen der Translationsinvarianz von u gilt $\|u(f_a)\|_q = \|(uf)_a\|_q = \|uf\|_q$ für jedes a in G und jedes f in $C_E(G)$. Daraus ergibt sich insbesondere

$$\int_G \|u(f_{-a})\|_q^p dm_G(a) = \int_G \|uf\|_q^p dm_G(a) = \|uf\|_q^p. \tag{4}$$

Sei weiterhin $f \in C_E(G)$. Wähle nun ein beliebiges $x^* \in (C_E(G))^*$ und dazu eine Hahn-Banach-Erweiterung $\mu \in \mathcal{M}(G)$ mit $\|\mu\| = \|x^*\|$. Damit ergibt sich

$$\langle x^*, f_{-a}\rangle = \langle \mu, f_{-a}\rangle = \int_G f(x+a) d\mu(x) = \int_G f(a-x) d\mu'(x) = (\mu' * f)(a).$$

Wiederum erhalten wir $\|\mu' * f\|_p \leq \|\mu'\| \, \|f\|_p = \|\mu\| \, \|f\|_p = \|x^*\| \, \|f\|_p$. Für $\|x^*\| \leq 1$ können wir damit folgende Abschätzung machen:

$$\int_G |\langle x^*, f_{-a}\rangle|^p dm_G(a) = \int_G |(\mu' * f)(a)|^p dm_G(a) = \|\mu' * f\|_p^p \leq \|x^*\|^p \|f\|_p^p \leq \|f\|_p^p.$$

Durch Kombination dieser Ungleichungen, erhalten wir

$$\|uf\|_q^p \underset{(4)}{=} \int_G \|u(f_{-a})\|_q^p dm_G(a) \underset{(2.1.2)}{\leq} \pi_p(u)^p \sup_{x^* \in B_{(C_E(G))^*}} \int_G |\langle x^*, f_{-a}\rangle|^p dm_G(a) \leq \pi_p(u)^p \|f\|_p^p$$

oder $\|uf\|_q \leq \pi_p(u)\|f\|_p$ für jedes f in $C_E(G)$, d.h. u ist vom Typ (p, q). ■

2.1.4 Lemma *Seien $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < r < \infty$ und $E, F \subset \Gamma$. Für jeden Operator $u \in \Pi_r^{inv}(L_E^p(G), L_F^q(G))$ und jeden translationsinvarianten Operator $v : Trig \to Trig_E$ vom Typ (p^*, r) ist uv vom Typ $(1, q)$ und es gilt $\|uv\|_{1,q} \leq \pi_r(u)\|v\|_{p^*,r}$.*

Beweis Da v vom Typ (p^*, r) ist, existiert eine Konstante C, so dass $\|vf\|_r \leq C\|f\|_{p^*}$ für jedes $f \in Trig$ erfüllt ist. Translationen sind Isometrien, so dass wir wegen der Translationsinvarianz von u und v mit 2.1.2 erhalten:

$$\begin{aligned} \|u(vf)\|_q^r &= \int_G \|u(vf)\|_q^r dm_G(a) = \int_G \|u(v(f_{-a}))\|_q^r dm_G(a) \\ &\leq \pi_r(u)^r \sup_{x^* \in B_{(L_E^p(G))^*}} \int_G |\langle x^*, v(f_{-a})\rangle|^r dm_G(a). \end{aligned} \tag{5}$$

Wir behandeln zuerst $p < \infty$. Sei $x^* \in (L_E^p(G))^*$, und sei g eine normerhaltende Hahn-Banach-Erweiterung aus $L^{p^*}(G)$. Beachten wir 1.4.21, so ergibt sich für beliebige $f \in Trig$ und $h \in L^{p^*}(G)$

$$\begin{aligned} (v(h' * f))(a) = (h' * v(f))(a) &= \int_G h'(a-x)v(f)(x)dm_G(x) = \int_G h(x-a)v(f)(x)dm_G(x) \\ &= \int_G h(x)v(f)(x+a)dm_G(x) = \int_G h(x)(v(f))_{-a}(x)dm_G(x) \\ &= \int_G h(x)v(f_{-a})(x)dm_G(x). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$|\langle x^*, v(f_{-a})\rangle|^r = |\langle g, v(f_{-a})\rangle|^r = |\int_G g(x)(v(f_{-a}))(x)dm_G(x)|^r = |v(g' * f)(a)|^r.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_G |\langle x^*, v(f_{-a})\rangle|^r dm_G(a) &= \int_G |v(g' * f)(a)|^r dm_G(a) = \|v(g' * f)\|_r^r \leq C^r \|g' * f\|_{p^*}^r \\ &\leq C^r \|g'\|_{p^*}^r \|f\|_1^r = C^r \|g\|_{p^*}^r \|f\|_1^r = C^r \|x^*\|^r \|f\|_1^r. \end{aligned}$$

Im Fall $p = \infty$ wählen wir wiederum ein $x^* \in (C_E(G))^*$ und dazu eine normerhaltende Hahn-Banach-Erweiterung $\mu \in \mathcal{M}(G) = (C(G))^*$. Für $f \in Trig$ gilt ebenfalls mit 1.4.21

$$\begin{aligned} (v(\mu' * f))(a) = (\mu' * v(f))(a) &= \int_G v(f)(a-x)d\mu'(x) = \int_G v(f)(a+x)d\mu(x) \\ &= \int_G (v(f))_{-a}(x)d\mu(x) = \int_G v(f_{-a})(x)d\mu(x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|\langle x^*, v(f_{-a})\rangle|^r = |\langle \mu, v(f_{-a})\rangle|^r = |\int_G (v(f_{-a}))(x)d\mu(x)|^r = |v(\mu' * f)(a)|^r,$$

also

$$\begin{aligned}\int_G |\langle x^*, v(f_{-a})\rangle|^r dm_G(a) = \int_G |v(\mu' * f)(a)|^r dm_G(a) = \|v(\mu' * f)\|_r^r \leq C^r \|\mu' * f\|_1^r \\ \leq C^r \|\mu'\|^r \|f\|_1^r = C^r \|\mu\|^r \|f\|_1^r = C^r \|x^*\|^r \|f\|_1^r.\end{aligned}$$

In beiden Fällen erhalten wir

$$\begin{aligned}\|uvf\|_q^r \underset{(5)}{\leq} \pi_r(u)^r \sup_{x^* \in B_{(L_E^p(G))^*}} \int_G |\langle x^*, vf_{-a}\rangle|^r dm_G(a) \\ \leq \pi_r(u)^r \sup_{x^* \in B_{(L_E^p(G))^*}} C^r \|x^*\|^r \|f\|_1^r \leq \pi_r(u)^r C^r \|f\|_1^r.\end{aligned}$$

Folglich ist uv vom Typ $(1, q)$ mit $\|uv\|_{1,q} \leq C\pi_r(u)$. Da $C > \|v\|_{p^*,r}$ beliebig gewählt werden kann, gilt sogar $\|uv\|_{1,q} \leq \pi_r(u)\|v\|_{p^*,r}$. ■

2.1.5 Lemma *Für jedes $f \in Trig_E$ wird durch $w_f(x^*) := \sum_{\gamma \in E} x^*(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma$ ein stetiger Operator $w_f : (C_E(G))^* \to C_E(G)$ mit $\|w_f\| \leq \|f\|_\infty$ definiert.*

Beweis Mit $f \in Trig_E$ gehören alle f_{-a} zu $Trig_E$ und damit zu $C_E(G)$. Wir definieren $w_f : (C_E(G))^* \to C_E(G); x^* \mapsto \sum_{\gamma \in E}\langle x^*, \gamma\rangle \hat{f}(\gamma)\gamma$. Offenbar ist w_f linear. Für ein beliebiges $x^* \in (C_E(G))^*$ gilt

$$\langle x^*, f_{-a}\rangle = \langle x^*, \sum_{\gamma \in E} \widehat{f_{-a}}(\gamma)\gamma\rangle = \sum_{\gamma \in E} \widehat{f_{-a}}(\gamma)\langle x^*, \gamma\rangle \underset{(1.4.10)}{=} \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)(\gamma|a)\langle x^*, \gamma\rangle = w_f(x^*)(a).$$

Die Abschätzung

$$\|w_f(x^*)\|_\infty = \sup_{a \in G} |w_f(x^*)(a)| = \sup_{a \in G} |\langle x^*, f_{-a}\rangle| \leq \|x^*\| \sup_{a \in G} \|f_{-a}\|_\infty = \|x^*\| \, \|f\|_\infty$$

ergibt, dass w_f stetig ist mit $\|w_f\| \leq \|f\|_\infty$. ■

2.1.6 Lemma *Sei $E \subset \Gamma$. Für jeden Operator $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$ gilt*

$$\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 < \infty.$$

Beweis Sei $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$. Setze $v := u^* k_E^* j$ wobei j die Einbettung von $L^1(G)$ in $\mathcal{M}(G)$ bezeichnet. Dann ist v translationsinvariant, und es existiert eine Funktion $\varphi \in L^2(G)$, so dass $v = u_\varphi$ (1.4.18). Wähle ein $f \in Trig$ und ein $\gamma_0 \in \Gamma$. Dann erhalten wir mit den Orthogonalitätsbeziehungen der Charaktere

$$\begin{aligned}\langle v(\gamma_0), f\rangle &= \langle u^* k_E^* j(\gamma_0), f\rangle = \langle j(\gamma_0), k_E u(f)\rangle = \langle j(\gamma_0), u(\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma)\rangle = \langle j(\gamma_0), \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)u(\gamma)\rangle \\ &= \langle j(\gamma_0), \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\gamma\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\langle \gamma_0, \gamma\rangle = \hat{f}(\overline{\gamma_0})\hat{u}(\overline{\gamma_0}) \\ &= \hat{u}(\overline{\gamma_0}) \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\langle \gamma_0, \gamma\rangle = \hat{u}(\overline{\gamma_0})\langle \gamma_0, \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma\rangle = \langle \hat{u}(\overline{\gamma_0})\gamma_0, f\rangle.\end{aligned}$$

Damit ist $v(\gamma_0) = \hat{u}(\overline{\gamma_0})\gamma_0$. Insgesamt gilt also $(\hat{u}(\gamma))_\gamma = (\hat{v}(\overline{\gamma}))_\gamma = (\hat{\varphi}(\overline{\gamma}))_\gamma \in l_2^\Gamma$. ■

2.2 Sidonmengen und $\Lambda(p)$-Mengen

Eine Menge $E \subset \Gamma$ heisst **Sidonmenge**, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass für jedes $f \in Trig_E$ gilt:

$$\sum_{\gamma\in E} |\hat{f}(\gamma)| \le C\|f\|_\infty.$$

Falls E^c eine Sidonmenge ist, nennt man E eine **Co-Sidonmenge**. Eine Menge $E \subset \Gamma$ heisst **$\Lambda(p)$-Menge** ($1 < p < \infty$), falls ein C>0 existiert, so dass für jedes $f \in Trig_E$ gilt

$$\|f\|_p \le C\|f\|_1.$$

Im folgenden sind einige Eigenschaften dieser Mengen zusammengestellt.

2.2.1 Satz (Sidonmengen) *Seien $E, F \subset \Gamma$.*

- *(i) Ist E endlich, so ist E eine Sidonmenge.*
- *(ii) Sind E und F Sidonmengen, so ist $E \cup F$ eine Sidonmenge.*
- *(iii) Jede Teilmenge einer Sidonmenge ist eine Sidonmenge.*
- *(iv) Jede Sidonmenge ist eine $\Lambda(p)$-Menge für jedes $1 < p < \infty$.*
- *(v) E ist genau dann eine Sidonmenge, wenn die Abbildung $Q : L^1(G) \to c_0(E)$, definiert durch $Q(f) = (\hat{f}(\gamma))_{\gamma\in E}$, surjektiv ist. Dann ist $ker(Q) = L^1_{E^c}(G)$.*

(i) und (iii) ergeben sich direkt aus der Definition. (ii) findet man in [9] 3.5, (iv) ist in [6] 37.10 nachzulesen, und (v) wird in [9] 1.3 bewiesen.

2.2.2 Satz ($\Lambda(p)$-Mengen) *Seien $E, F \subset \Gamma$.*

(i) E ist genau dann eine $\Lambda(p)$-Menge, wenn ein $1 \le q < p$ existiert, so dass $\|f\|_p \le \|f\|_q$ für jedes $f \in Trig_E$ gilt.

(ii) E ist genau dann eine $\Lambda(p)$-Menge, wenn $L^p_E(G) = L^q_E(G)$ für ein $1 \le q < p$.

Die Beweise findet man in [6] 37.7.

Wir beginnen mit weiteren Charakterisierungen von Sidonmengen.

2.2.3 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Dann sind äquivalent:*

(i) E ist eine Sidonmenge.

(ii) Es existiert eine Menge S, so dass $C_E(G)$ zu l_1^S isomorph ist.

(iii) $\mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2_E(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2_E(G))$.

(iv) Die kanonische Einbettung $i_{2,E} : C_E(G) \to L^2_E(G)$ ist L_1-faktorisierbar.

(v) $C_E(G)$ hat Cotyp 2.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$ Für $f \in Trig_E$ gilt nach Voraussetzung

$$\sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)| \le C \|f\|_\infty.$$

Da $Trig_E$ in $C_E(G)$ dicht liegt, gilt dies sogar für alle $f \in C_E(G)$. Damit ist

$$\Phi : C_E(G) \to l_1^E : f \mapsto (\hat{f}(\gamma))_\gamma$$

wohldefiniert. Offenbar ist Φ linear und stetig. Die Injektivität folgt direkt aus der Injektivität der Fouriertransformation. Für $(\alpha_\gamma) \in l_1^E$ gilt

$$\sum_{\gamma \in E} \|\alpha_\gamma \gamma\|_\infty \le \sum_{\gamma \in E} |\alpha_\gamma| < \infty.$$

Deshalb ist $\Psi : l_1^E \to C_E(G); (a_\gamma)_\gamma \mapsto \sum_{\gamma \in E} a_\gamma \gamma$ wohldefiniert, linear und stetig. Offenbar handelt es sich um die Umkehrabbildung von Φ.

$(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ und $(ii) \Rightarrow (v)$ sind trivial.

$(iv), (v) \Rightarrow (i)$ Der Beginn beider Implikationen ist gleich. Für $f \in Trig_E$ sei w_f der Operator endlichen Ranges aus 2.1.5. Wir bilden den Operator

$$v_f := i_{2,E} w_f (i_{2,E})^* \in \mathcal{F}(L^2_E(G), L^2_E(G)).$$

Damit erhalten wir für $x^* \in L^2_E(G)$

$$\begin{aligned} v_f(x^*) &= (i_{2,E} w_f (i_{2,E})^*)(x^*) = i_{2,E} w_f (x^* \circ i_{2,E}) = i_{2,E}(\sum_{\gamma \in E} (x^* \circ i_{2,E})(\gamma) \hat{f}(\gamma)\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in E} \langle x^*, \gamma \rangle \hat{f}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma \in E} \langle \gamma, x^* \rangle \hat{f}(\gamma)\gamma = (\sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)(\gamma \otimes \gamma))(x^*). \end{aligned}$$

Da $(\gamma)_{\gamma \in E}$ eine Orthonormalbasis von $L^2_E(G)$ ist, gilt

$$\nu_1(v_f) = \sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)|. \tag{6}$$

Hier trennen sich die beiden Beweise. Wir wenden uns zuerst $(iv) \Rightarrow (i)$ zu. Sei $i_{2,E}$ L^1-faktorisierbar: Es existieren also ein Massraum (Ω, Σ, ν) und Operatoren $\alpha : C_E(G) \to L^1(\nu)$ und $\beta : L^1(\nu) \to L^2_E(G)$, so dass $i_{2,E} = \beta\alpha$. Dadurch erhalten wir folgende Faktorisierung von v_f:

$$\begin{tikzcd}
L^2_E(G) \arrow[rr, "(i_{2,E})^*"] \arrow[dr, "\beta^*"'] & & (C_E(G))^* \arrow[r, "w_f"] & C_E(G) \arrow[rr, "i_{2,E}"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & L^2_E(G) \\
& (L^1(\nu))^* \arrow[ur, "\alpha^*"'] & & & L^1(\nu) \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $(L^1(\nu))^*$ ein Raum $L^\infty(\mu)$ ist, folgt aus [2] 3.7, dass $\alpha w_f \alpha^*$ 2-summierend ist; für die Normen gilt

$$\pi_2(\alpha w_f \alpha^*) \le \kappa_G \|\alpha w_f \alpha^*\| \le \kappa_G \|\alpha\| \, \|w_f\| \, \|\alpha^*\|.$$

Dabei ist κ_G die Grothendieckkonstante (vgl. Seite 8). Weiter ist β wegen des Satzes von Grothendieck (1.3.2) 1-summierend und damit auch 2-summierend, und es gilt

$$\pi_2(\beta) \le \pi_1(\beta) \le \kappa_G \|\beta\|.$$

Nach 1.3.6(iv) ist $\beta\alpha w_f \alpha^*$ 1-nuklear mit

$$\nu_1(\beta\alpha w_f \alpha^*) \le \pi_2(\beta)\pi_2(\alpha w_f \alpha^*) \le \kappa_G^2 \|\alpha^*\| \, \|w_f\| \, \|\alpha\| \, \|\beta\|.$$

Setzt man $K := \kappa_G^2$, so erhalten wir, dass v_f 1-nuklear ist, wobei für die Norm gilt

$$\nu_1(v_f) \le \nu_1(\beta\alpha w_f \alpha^*)\|\beta^*\| \le K(\|\beta\| \, \|\alpha\|)^2 \|w_f\|.$$

Da dies für beliebige Faktorisierungen $i_{2,E} = \alpha\beta$ gilt, erhalten wir durch Übergang zum Infimum die Ungleichung $\nu_1(v_f) \le K\gamma_1(i_{2,E})^2 \|w_f\|$. Zusammen mit 2.1.5 und (6) ergibt dies

$$\sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)| = \nu_1(v_f) \le K\gamma_1(i_{2,E})^2 \|f\|_\infty.$$

Also ist E eine Sidonmenge.

$(v) \Rightarrow (i)$ Sei $C_E(G)$ vom Cotyp 2. Dann ist w_f ein Operator endlichen Ranges von einem Dualraum eines Raumes mit Cotyp 2 in einen Raum mit Cotyp 2. Aus [13] Theorem 1 folgt, dass ein Hilbertraum H und Operatoren $\alpha : (C_E(G))^* \to H$ und $\beta : H \to C_E(G)$ mit $\beta\alpha = w_f$ existieren, wobei $\|\beta\|\,\|\alpha\| \leq K\|w_f\|$ gilt und K nur von der Cotyp 2-Konstanten von $C_E(G)$ abhängt. Damit erhalten wir folgende Faktorisierung von v_f:

$$\begin{tikzcd} L^2_E(G) \arrow[r, "i^*_{2,E}"] & (C_E(G))^* \arrow[rr, "w_f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & C_E(G) \arrow[r, "i_{2,E}"] & L^2_E(G) \\ & & H \arrow[ur, "\beta"'] & & \end{tikzcd}$$

Mit $i_{2,E}$ ist auch $i_{2,E}\beta$ 2-summierend mit $\pi_2(i_{2,E}\beta) \leq \|\beta\|$. Analog ist $(i_{2,E})^{**}\alpha^*$ 2-summierend mit $\pi_2((i_{2,E})\alpha^*) \leq \|\alpha\|$. Damit ist auch $\alpha(i_{2,E})^*$ 2-summierend mit $\sigma_2(\alpha(i_{2,E})^*) \leq \|\alpha\|$, wobei σ_2 die Hilbert-Schmidt-Norm bezeichnet (vgl. Seite 11). Es gilt

$$\nu_1(v_f) \leq \sigma_2(i_{2,E}\beta)\sigma_2(\alpha(i_{2,E})^*) \leq \|\alpha\|\|\beta\| \leq K\|w_f\|.$$

Nun kombinieren wir diese Ungleichung mit 2.1.5 und (6) und erhalten

$$\sum_{\gamma\in E} |\hat{f}(\gamma)| = \nu_1(v_f) \leq K\|w_f\| \leq K\|f\|_\infty,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Die Bedingung in (v) kann abgeschwächt werden. In [1] bewiesen Bourgain und Milman, dass E bereits dann ein Sidonmenge ist, wenn $C_E(G)$ nur endlichen Cotyp hat.

Als Folgerung erhalten wir einen Satz, den Varopoulus bereits 1975 in [19] bewiesen hat.

2.2.4 Korollar *Falls $C_E(G)$ ein $\mathfrak{L}_1$-Raum ist, so ist E eine Sidonmenge.*

Beweis Dies folgt mit 2.2.3(v), denn $\mathfrak{L}_1$-Räume haben Cotyp 2. ■

Folgende Ergebnisse erschienen vor zwei Jahren in einem Artikel von Kalton und Pełczyński [7]. Sie gingen unter anderem der Frage nach, ob komplementierte translationsinvariante Teilräume von $L^1(G)$ existieren, die zu $L_1[0,1]$ isomorph sind.

- Sei E eine Co-Sidonmenge mit unendlichem Komplement. Dann gilt:
  - (i) Das kanonische Bild von $L^1_E(G)$ ist nicht in $(L^1_E(G))^{**}$ komplementiert.
  - (ii) Es existiert ein beschränkter Operator von $L^1_E(G)$ in einen Hilbertraum, der nicht 2-summierend ist.
  - (iii) $L^1_E(G)$ ist kein $\mathfrak{L}_1$-Raum.
- Sei $E \subset \Gamma$ eine Co-Sidonmenge. Dann gilt:

$$\mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2_E(G)) = \Pi^{inv}_p(L^1_E(G), L^2_E(G))$$

  für $0 \leq p \leq 2$.

- Ist $E \subset \Gamma$ eine Co-Sidonmenge, so hat $L^1_E(G)$ die Dunford-Pettis-Eigenschaft, das heisst für jede Nullfolge (x_i) in $L^1_E(G)$ und jede Nullfolge (x_i^*) in $L^1_E(G)^*$ konvergiert $(\langle x_i^*, x_i\rangle)$ gegen 0.

Wenden wir uns nun den $\Lambda(2)$-Mengen zu.

2.2.5 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Dann ist E genau dann eine $\Lambda(2)$-Menge, wenn die natürliche Einbettung $i_{2,E} : C_E(G) \to L^2_E(G)$ 1-summierend ist.*

Beweis Sei zuerst E eine $\Lambda(2)$-Menge. Dann existiert wegen 2.2.2(ii) ein $K > 0$, so dass $\|f\|_2 \leq K\|f\|_1$ für jedes $f \in L^1_E(G)$ und damit erst recht für jedes $f \in C_E(G)$ gilt. Das bedeutet aber, dass $i_{2,E}$ vom Typ $(1,2)$ ist. Mit 2.1.3 folgt nun die Behauptung

Ist andererseits $i_{2,E}$ 1-summierend, so schliessen wir ebenfalls mir 2.1.3, dass $i_{2,E}$ vom Typ $(1,2)$ ist. Entsprechend existiert eine Konstante $K > 0$, so dass $\|f\|_2 \leq K\|f\|_1$ für alle $f \in C_E(G)$ und insbesondere für alle $f \in Trig_E$. Dies ist aber die Behauptung. ■

Damit erhalten wir erneut ein Resultat, das uns bereits aus 2.2.1(iv) bekannt ist.

2.2.6 Satz *Jede Sidonmenge ist eine $\Lambda(2)$-Menge.*

Beweis Sei E eine Sidonmenge. Dann ist wegen 2.2.3(ii) $C_E(G)$ isomorph zu l_1^E, und somit ein $\mathfrak{L}_1$-Raum. Andererseits ist $L^2_E(G)$ ein $\mathfrak{L}_2$-Raum. Somit ist nach dem Satz von Grothendieck (1.3.2) die Abbildung $i_{2,E} : C_E(G) \to L^2_E(G)$ 1-summierend. Mit dem vorhergehenden Satz erhalten wir die Behauptung. ■

Wir können damit eine in der Einleitung erwähnte Beziehung beweisen.

2.2.7 Korollar *Sei $E \subset \Gamma$. Genau dann ist E eine $\Lambda(2)$-Menge, wenn*

$$\Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2(G)).$$

Beweis „$\Leftarrow$" Nach Voraussetzung ist $j_{2,E}$ 1-summierend. Bezeichnet π_E die Projektion von $L^2(G)$ auf $L^2_E(G)$, dann ist auch $i_{2,E} = \pi_E j_{2,E}$ 1-summierend, und die Behauptung folgt aus 2.2.5.

„$\Rightarrow$" Sei E eine $\Lambda(2)$-Menge. Für $u \in \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ und $\gamma \in E$ gilt

$$|\hat{u}(\gamma)| = \|\hat{u}(\gamma)\gamma\|_2 = \|u(\gamma)\|_2 \leq \|u\|.$$

Damit erhalten wir für $f \in Trig_E$

$$\begin{aligned}\|u(f)\|_2 &= \|u(\sum_{\gamma\in E} \hat{f}(\gamma)\gamma)\|_2 = \|\sum_{\gamma\in E} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\gamma\|_2 = (\sum_{\gamma\in E} |\hat{f}(\gamma)|^2|\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2} \\ &\leq (\sum_{\gamma\in E} |\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2}\|u\| = \|f\|_2\|u\|.\end{aligned}$$

Somit lässt sich u zu einem Operator $\tilde{u} : L^2_E(G) \to L^2(G)$ erweitern. Mit $i_{2,E}$ ist auch $u = \tilde{u} i_{2,E}$ 1-summierend. ■

2.3 Cohenmengen

Um Cohenmengen definieren zu können, benötigen wir noch zwei Begriffe. Ein Mass $\nu \in \mathcal{M}(G)$ heisst **idempotent**, falls $\hat{\nu}(\gamma)^2 = \hat{\nu}(\gamma)$, d.h. also $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ oder 1 für jedes $\gamma \in \Gamma$ gilt. Ein Mass ν heisst **quasi-idempotent**, falls $|\hat{\nu}(\gamma)|^2 \geq |\hat{\nu}(\gamma)|$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Eine Menge $E \subset \Gamma$ heisst **(quasi-)Cohenmenge**, falls E Träger eines (quasi-)idempotenten Masses $\nu \in \mathcal{M}(G)$ ist: genau für $\gamma \in E^c$ ist $\hat{\nu}(\gamma) = 0$.

2.3.1 Lemma *Sei $E \subset \Gamma$. Gilt für jeden Operator $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ die Ungleichung $\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 < \infty$, so existiert eine Konstante $C > 0$ mit*

$$(\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq C\|u\|.$$

Beweis Wegen der Voraussetzung ist $T : \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G)) \to l_2^E : u \mapsto (\hat{u}(\gamma))_\gamma$ wohldefiniert und linear. Offensichtlich ist T injektiv. Für eine beliebige Folge $\alpha := (\alpha_\gamma)_\gamma \in l_2^E$ und $f \in Trig_E$ setze $\tilde{u}_\alpha(f) := \sum_{\gamma \in E} \alpha_\gamma \hat{f}(\gamma)\gamma$. Direkt aus der Definition ergibt sich, dass $\tilde{u}_\alpha$ linear ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_\alpha(f)\|_2 &= \|\sum_{\gamma \in E} \alpha_\gamma \hat{f}(\gamma)\gamma\|_2 = (\sum_{\gamma \in E} |\alpha_\gamma \hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2} \\ &\leq (\sum_{\gamma \in E} |\alpha_\gamma|^2)^{1/2}\|f\|_1 = \|(\alpha_\gamma)_\gamma\|_2\|f\|_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit ist $\tilde{u}_\alpha : Trig_E \to L^2(G)$ stetig mit $\|\tilde{u}_\alpha\| \leq \|\alpha\|_2$ und lässt sich eindeutig zu einem Operator $u_\alpha : L^1_E(G) \to L^2(G)$ fortsetzen. Offensichtlich ist u_α translationsinvariant. Somit ist $S : l_2^E \to \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G)) : \alpha \mapsto u_\alpha$ wohldefiniert. Offensichtlich ist S linear und wegen (7) stetig mit $\|S\| \leq 1$. Für $\alpha = (\hat{u}(\gamma))_\gamma$ gilt

$$u_\alpha(\gamma) = \alpha_\gamma\gamma = \hat{u}(\gamma)\gamma = u(\gamma) \ \forall \gamma \in E;$$

es ist also $ST(u) = u_\alpha = u$. Wegen

$$\hat{u}_\alpha(\gamma) = \alpha_\gamma\gamma \ \forall \gamma \in E, \forall \alpha \in l_2^E$$

gilt $\hat{u}_\gamma = \alpha_\gamma$ und damit $TS(\alpha) = \alpha$. Also sind S und T zueinander invers. Wegen des Graphensatzes ist T stetig, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$(\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2} = \|Tu\|_2 \leq C\|u\|$$

für alle $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$. ■

Wir wenden uns weiteren Charakterisierungen von quasi-Cohenmengen zu.

2.3.2 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Dann sind äquivalent:*

(i) *E ist eine quasi-Cohenmenge.*

(ii) *Für jedes $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ gilt $\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 < \infty$.*

(iii) *Für jedes $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ existiert ein $\varphi \in L^2(G)$ mit $u_\varphi|_{L^1_E(G)} = u$.*

(iv) *Es existiert ein $K > 0$ so dass für alle $\varphi \in Trig$ mit $\hat{\varphi}(\gamma) \geq 0$ und für alle $\gamma \in E$ gilt:*

$$\sum_{\gamma \in E} \hat{\varphi}(\gamma) \leq K \|\varphi\|_\infty.$$

(v) *Es existiert ein quasi-idempotentes Mass $\nu \in \mathcal{M}(G)$, so dass $\hat{\nu}(\gamma) \geq 0$ für alle $\gamma \in \Gamma$ und $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ genau für $\gamma \in E^c$.*

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$ Sei μ ein quasi-idempotentes Mass zu E. Nach 1.4.18(i) ist der Faltungsoperator $u_\mu : L^1(G) \to L^1_E(G)$ wohldefiniert. Sei weiter $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$. Dann ist $uu_\mu \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^2(G))$. Nach 1.4.18(iii) ist uu_μ kompakt und deshalb wegen 1.4.18(ii) ein Faltungsoperator zu einer Funktion $f \in L^2(G)$, d.h. es gilt $uu_\mu = u_f$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 &\leq \sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 |\hat{\mu}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 |\widehat{u}_\mu(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\widehat{uu}_\mu(\gamma)|^2 \\ &= \sum_{\gamma \in E} |\widehat{u}_f(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)|^2 \leq \|f\|_2^2 < \infty,\end{aligned}$$

und das ist die Behauptung.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$. Nach Voraussetzung ist $\varphi := \sum_{\gamma \in E} \hat{u}(\gamma)\gamma \in L^2(G)$ wohldefiniert. Für beliebige $\gamma_1 \in E$ und $x \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}(u_\varphi(\gamma_1))(x) &= (\varphi * \gamma_1)(x) = ((\sum_{\gamma \in E} \hat{u}(\gamma)\gamma) * \gamma_1)(x) = \sum_{\gamma \in E} \hat{u}(\gamma)(\gamma * \gamma_1)(x) \\ &= \sum_{\gamma \in E} \hat{u}(\gamma)\gamma(x)\delta_{\gamma\gamma_1} = \hat{u}(\gamma_1)\gamma_1(x) = u(\gamma_1)(x).\end{aligned}$$

Damit stimmen u und u_φ auf $Trig_E$ überein. Da aber $Trig_E$ in $L^1_E(G)$ dicht liegt, gilt sogar $u(f) = u_\varphi(f)$ für alle $f \in L^1_E(G)$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Seien $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ und $\varphi \in L^2(G)$ die Funktion, für welche u_φ den Operator u erweitert. Aus 1.4.18(ii) folgt $u_\varphi \in \mathcal{K}^{inv}(L^1(G), L^2(G))$. Also ist

$$\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{u}_\varphi(\gamma)|_2^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 \leq \|\varphi\|_2^2 < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Sei $\varphi \in Trig$ mit $\hat{\varphi}(\gamma) \geq 0$ für jedes $\gamma \in E$. Definiere damit

$$u : Trig_E \to Trig; f \mapsto \sum_{\gamma \in E} \sqrt{\hat{\varphi}(\gamma)} \hat{f}(\gamma)\gamma.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|u(f)\|_2^2 &= \|\sum_{\gamma\in E}\sqrt{\hat{\varphi}(\gamma)}\hat{f}(\gamma)\gamma\|_2^2 = \sum_{\gamma\in E}|\sqrt{\hat{\varphi}(\gamma)}\hat{f}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in E}|\hat{f}(\gamma)|^2|\hat{\varphi}(\gamma)| \\
&= \sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}\hat{f}(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma) = \sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}\int_G(\gamma|-x)f(x)dm_G(x)\int_G(\gamma|-y)\varphi(y)dm_G(y) \\
&= \sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}\int_G(\gamma|-x)f(x)dm_G(x)\int_G(\gamma|y)\varphi(-y)dm_G(y) \\
&= \sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}\int_G\int_G(\gamma|-x)(\gamma|y)f(x)\varphi(-y)dm_G(y)dm_G(x) \\
&= \sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}\int_G\int_G(\gamma|-x)(\gamma|y+x)f(x)\varphi(-y-x)dm_G(y)dm_G(x) \\
&= \int_G\sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)}(\gamma|y)\int_G\varphi(-y-x)f(x)dm_G(x)dm_G(y) \\
&= \int_G\sum_{\gamma\in E}\overline{\hat{f}(\gamma)(\gamma|-y)}\int_G\varphi(-y-x)f(x)dm_G(x)dm_G(y) \\
&= \int_G\overline{f(-y)}(\varphi*f)(-y)dm_G(y) \\
&\leq \|f\|_1\|\varphi*f\|_\infty \leq \|f\|_1^2\|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Damit kann u zu einem Operator $\tilde{u}\in\mathfrak{L}^{inv}(L_E^1(G),L^2(G))$ mit $\|\tilde{u}\| = \|u\| \leq \|\varphi\|_\infty^{1/2}$ erweitert werden. Wegen 2.3.1 existiert eine Konstante $C>0$, so dass $(\sum_{\gamma\in E}|\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2}\leq C\|u\|$. Zusammen erhalten wir wie behauptet

$$\sum_{\gamma\in E}\hat{\varphi}(\gamma) = \sum_{\gamma\in E}|\hat{u}(\gamma)|^2 \leq C^2\|u\|^2 \leq C^2\|\varphi\|_\infty.$$

$(iv)\Rightarrow(v)$ Sei die Ungleichung in (iv) erfüllt. Betrachte die Menge

$$Trig^+ := \{f\in Trig : \hat{f}(\gamma)\geq 0\ \forall\gamma\in E\}$$

mit der von $C(G)$ induzierten Metrik. Wegen der Stetigkeit der Fouriertransformation ist diese Menge in $Trig$ abgeschlossen. Aus der Ungleichung in (iv) folgt weiter, dass

$$\Psi : Trig^+ \to l_1^\Gamma; f\mapsto(\hat{f}(\gamma))_{\gamma\in\Gamma}$$

stetig ist. Somit ist

$$\mathbb{W} := \{f\in Trig : \hat{f}(\gamma)\geq 0\ \forall\gamma\in E, \sum_{\gamma\in E}\hat{\Phi}(\gamma) = K\}$$

in $Trig^+$ und damit auch in $Trig$ abgeschlossen. Seien nun $f_1,f_2\in\mathbb{W}$ und $\lambda\in(0,1)$. Dann gilt

$$(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)\hat{}(\gamma) = \lambda\hat{f}_1(\gamma)+(1-\lambda)\hat{f}_2(\gamma)\geq 0$$

und weiter

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in E}(\lambda f_1+(1-\lambda)f_2)\hat{}(\gamma) &= \sum_{\gamma\in E}\lambda\hat{f}_1(\gamma)+(1-\lambda)\hat{f}_2(\gamma)=\lambda\sum_{\gamma\in E}\hat{f}_1(\gamma)+(1-\lambda)\sum_{\gamma\in E}\hat{f}_2(\gamma)\\ &= \lambda K+(1-\lambda)K=K.\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass $\mathbb{W}$ konvex ist. Mit

$$\{f\in Trig:\|f\|_\infty<1\}$$

ist auch

$$\begin{aligned}\mathbb{O}&:=\{f\in Trig: f=g_1+g_2:\|g_1\|_\infty<1,\widehat{-g_2}(\gamma)\geq 0\ \forall\gamma\in E\}\\ &=\{f\in Trig:\|f\|_\infty<1\}+\{f\in Trig:\widehat{-f_2}(\gamma)\geq 0\ \forall\gamma\in E\}\end{aligned}$$

offen in $Trig$. Seien $f_1,f_2\in\mathbb{O}$ und $\lambda\in(0,1)$. Sei weiter $f_1=g_1^{(1)}+g_1^{(2)}$, $f_2=g_2^{(1)}+g_2^{(2)}$ eine Zerlegung gemäss Definition von $\mathbb{O}$. Dann gilt

$$\|\lambda g_1^{(1)}+(1-\lambda)g_2^{(1)}\|_\infty\leq\lambda\|g_1^{(1)}\|_\infty+(1-\lambda)\|g_2^{(1)}\|_\infty<\lambda+(1-\lambda)=1.$$

Wie bereits oben gezeigt, gilt auch

$$(-(\lambda g_1^{(2)}+(1-\lambda)g_2^{(2)}))\hat{}(\gamma)\geq 0\ \forall\gamma\in E.$$

Damit ist auch $\mathbb{O}$ konvex. Wegen $\|0\|_\infty=0<1$ und $\widehat{-0}(\gamma)=0$ für alle $\gamma\in E$ ist $0=0+0\in\mathbb{O}$.

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{W}$ und $\mathbb{O}$ disjunkt sind. Nehmen wir an, es gibt ein $f\in\mathbb{W}\cap\mathbb{O}$. Dann finden wir Funktionen $g_1,g_2\in Trig$, so dass $\|g_1\|_\infty<1$, $\widehat{-g_2}(\gamma)\geq 0$ für alle $\gamma\in E$ und $f=g_1+g_2$. Zusammen mit $\hat{f}(\gamma)\geq 0$ für alle $\gamma\in E$ ergibt sich, dass $\hat{g}_1(\gamma)=\widehat{f-g_2}(\gamma)\geq 0$ für alle $\gamma\in E$. Wenden wir (iv) auf g_1 an, so folgt

$$K>K\|g_1\|_\infty\geq\sum_{\gamma\in E}\widehat{f-g_2}(\gamma)\geq\sum_{\gamma\in E}\hat{f}(\gamma).$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung $f\in\mathbb{W}$.

Wegen des Trennungssatzes von Hahn-Banach existieren eine Linearform $T:Trig\to\mathbb{C}$ und eine reelle Konstante C so, dass

$$\operatorname{Re}T(f)<C\ \forall f\in\mathbb{O}, \tag{8}$$

$$\operatorname{Re}T(f)\geq C\ \forall f\in\mathbb{W}. \tag{9}$$

Da 0 in $\mathbb{O}$ liegt, ist C positiv und kann durch Skalierung von T gleich der Konstanten K aus (iv) gewählt werden. Da $Trig$ in $C(G)$ dicht ist, kann T eindeutig zu einer Linearform $\mu\in\mathcal{M}(G)=(C(G))^*$ erweitert werden. Es gilt also

$$T(g)=\int_G g(x)d\mu(x)\ \forall g\in C(G),$$

und die Ungleichungen (8) und (9) lauten

$$\operatorname{Re}\int_G f(x)d\mu(x) < K \; \forall f \in \mathbb{O},$$
$$\operatorname{Re}\int_G f(x)d\mu(x) \geq K \; \forall f \in \mathbb{W}.$$

Damit definieren wir ein weiteres Mass $\nu \in \mathcal{M}(G)$ durch $\nu(A) := \overline{\mu(-A)}$ für $A \in \mathfrak{B}(G)$. Für die Fourierkoeffizienten gilt

$$\hat{\nu}(\gamma) = \int_G (\gamma|-x)d\nu(x) = \overline{\int_G \overline{(\gamma|-x)}d\mu(x)} = \overline{\int_G (-\gamma|-x)d\mu(x)} = \overline{\hat{\mu}(-\gamma)}. \tag{10}$$

Wähle ein beliebiges $\gamma_1 \in E$. Für $\varphi := K\gamma_1$ gilt

$$\hat{\varphi}(\gamma) = \begin{cases} K & \text{, falls } \gamma = \gamma_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist φ ein Element der Menge $\mathbb{W}$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} K|\hat{\nu}(\gamma_1)| = K|\hat{\mu}(-\gamma_1)| &\geq K \operatorname{Re}\hat{\mu}(-\gamma_1) = K \operatorname{Re}\int_G (-\gamma_1|-x)d\mu(x) \\ &= K \operatorname{Re}\int_G (\gamma_1|x)d\mu(x) = \operatorname{Re}\int_G K(\gamma_1|x)d\mu(x) = \operatorname{Re}\int_G \varphi(x)d\mu(x) \geq K, \end{aligned}$$

also $1 \leq |\hat{\nu}(\gamma_1)|$ für $\gamma_1 \in E$. Wir behaupten, dass ν sogar ein quasi-idempotentes Mass ist. Dazu fehlt nur noch der Nachweis von $\hat{\nu}(\gamma) = 0$ für $\gamma \in \Gamma \setminus E$. Nehmen wir an, das sei falsch; für ein $\gamma_1 \in \Gamma \setminus E$ ist $\hat{\nu}(\gamma_1) \neq 0$. Mit (10) folgt $\hat{\mu}(-\gamma_1) \neq 0$. Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$ so, dass $\alpha\hat{\mu}(-\gamma_1) = K$. Setze $\varphi := \alpha\gamma_1$. Da $\hat{\varphi}(\gamma) = 0$ für alle $\gamma \in E$ ist, stammt $\varphi = 0 + \varphi$ aus $\mathbb{O}$. Damit ergibt sich ein Widerspruch:

$$K > \int_G \varphi(x)d\mu(x) = \alpha\hat{\mu}(-\gamma_1) = K.$$

Um (v) zu beweisen, bleibt zu zeigen, dass $\hat{\nu}(\gamma) \geq 0$ für $\gamma \in E$. Nehmen wir an, das sei falsch. Dann ist $\hat{\nu}(\gamma) < 0$ für ein $\gamma \in E$. Für $\varphi := \frac{K}{\hat{\nu}(\gamma)}\gamma$ ist $\widehat{-\varphi}(\gamma) = -\frac{K}{\hat{\nu}(\gamma)} \geq 0$, d.h. $\varphi \in \mathbb{O}$. Wegen

$$K > \int_G \varphi(x)d\mu(x) = \frac{K}{\hat{\nu}(\gamma)}\int_G (\gamma|x)d\mu(x) = \frac{K}{\hat{\nu}(\gamma)}\int_G (-\gamma|-x)d\mu(x) = \frac{K}{\hat{\nu}(\gamma)}\hat{\mu}(-\gamma) = K$$

bekommen wir einen Widerspruch.

$(v) \Rightarrow (i)$ ist trivial. ■

Der vorhergehende Beweis stammt aus [8]. Eine Anwendung von 2.3.2 erlaubt es uns, quasi-Cohenmengen mit Hilfe von Banachidealen zu charakterisieren.

2.3.3 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Dann sind äquivalent:*

(i) E ist eine quasi-Cohenmenge.

(ii) Für alle $F \subset \Gamma$ haben wir $\Pi_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G)) = \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G))$, und mit einer nur von E abhängigen Konstanten $K > 0$ gilt

$$\pi_1(u) \leq \nu_1(u) \leq K\pi_1(u) \;\forall u \in \Pi_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G)).$$

(iii) Für alle $F \subset \Gamma$ haben wir $\mathfrak{L}^{inv}(L_F^2(G), C_E(G)) = \Gamma_\infty^{inv}(L_F^2(G), C_E(G))$, und es gilt

$$\|u\| \leq \gamma_\infty(u) \leq C\|u\| \;\forall u \in \mathfrak{L}^{inv}(L_F^2(G), C_E(G))$$

mit einer nur von E abhängigen Konstanten $C > 0$.

Beweis *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Die Inklusion

$$\mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G)) \subset \Pi_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G)).$$

ist klar (1.3.6(i)).

Sei umgekehrt $u \in \Pi_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G))$. Nach 2.1.3 existiert ein stetiger Operator $\tilde{u} : L_E^1(G) \to L_F^2(G)$, so dass $u = \tilde{u}i_{1,E}$. Setze $u_0 := k_{2,F}\tilde{u} : L_E^1(G) \to L^2(G)$. Nach dem Satz 2.3.2 existiert ein $\varphi \in L^1(G)$, so dass $u_0 = u_\varphi k_{1,E}$. Da $i_{1,E}$ und $k_{1,E}$ 1-summierend sind, ist $u = \pi_F u_\varphi k_{1,E} i_{1,E}$ nuklear. Für die Normen gilt

$$\begin{aligned}\nu_1(u) &= \nu_1(\pi_F u_\varphi k_{1,E} i_{1,E}) \leq \nu_1(u_\varphi k_{1,E} i_{1,E}) \leq \pi_1(u_\varphi k_{1,E})\pi_1(i_{1,E}) \\ &\leq \pi_1(u_\varphi)\pi_1(i_{1,E}) \leq \kappa_G\|u_\varphi\|\pi_1(i_{1,E}) \leq \kappa_G K\|u_0\|\pi_1(i_{1,E}) \\ &= \kappa_G K\|\tilde{u}\|\pi_1(i_{1,E}) \leq \kappa_G K\pi_1(u)\pi_1(i_{1,E}).\end{aligned}$$

Dabei ist π_F die Orthogonalprojektion auf $L_F^2(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Sei $v \in \mathfrak{L}^{inv}(L_F^2(G), C_E(G))$. Nach 1.3.6(xi) gilt

$$[\Gamma_\infty, \gamma_\infty] = [\mathcal{I}_\infty, \iota_\infty] = [\Pi_1^*, \pi_1^*].$$

Wir haben also zu zeigen, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für jede Wahl von endlichdimensionalen normierten Räumen X, Y und $w \in \mathfrak{L}(X, L_F^2(G)), u \in \mathfrak{L}(C_E(G), Y)$ und $t \in \mathfrak{L}(Y, X)$ gilt:

$$|\operatorname{tr}(tuvw)| \leq C\pi_1(t)\|u\|\,\|w\|.$$

Seien also solche Operatoren gewählt. $\tilde{u} := wtu \in \mathfrak{L}(C_E(G), L_F^2(G))$ hat endlichen Rang. Wegen 1.5.4 gelten

$$\operatorname{tr}(\tilde{u}_{av}v) = \operatorname{tr}(\tilde{u}v), \text{ und } \pi_1(\tilde{u}_{av}) \leq \pi_1(\tilde{u}).$$

Aus (ii) folgt die Existenz einer Konstanten $K = K(E) > 0$ mit $\nu_1(w) \leq K\pi_1(w)$ für jedes $w \in \Pi_1^{inv}(C_E(G), L_F^2(G))$. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}|\operatorname{tr}(tuvw)| &= |\operatorname{tr}(vwtu)| = |\operatorname{tr}(\tilde{u}v)| = |\operatorname{tr}(\tilde{u}_{av}v)| \\ &\leq \nu_1(\tilde{u}_{av}v) \leq \nu_1(\tilde{u}_{av})\|v\| \leq K\pi_1(\tilde{u}_{av})\|v\| \\ &\leq K\pi_1(\tilde{u})\|v\| \leq K\|v\|\,\|w\|\pi_1(t)\|u\|.\end{aligned}$$

Somit ist $v \in \Gamma_\infty(L_F^2(G), C_E(G))$, und es gilt die Abschätzung $\gamma_\infty(v) \leq K\|v\|$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Wir verwenden in diesem Schritt 2.3.2(ii). Sei $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L_E^1(G), L_F^2(G))$. Weiter sei A eine beliebige, endliche Teilmenge von Γ, und π_A bezeichne die Orthogonalprojektion $L_F^2(G) \to L_{F\cap A}^2(G)$. Setze $u^A := \pi_A u i_{1,E}$. Wähle endlichdimensionale normierte Räume X und Y sowie Operatoren $s \in \mathfrak{L}(X, C_E(G))$, $r \in \mathfrak{L}(L_{F\cap A}^2(G), Y)$ und $t \in \mathfrak{L}(Y, X)$ und setze $v := str$. Für $w := v_{av} \in \mathfrak{L}^{inv}(L_{F\cap A}^2(G), C_E(G))$ gilt mit 1.5.1 $\operatorname{tr}(u^A v) = \operatorname{tr}(u^A w)$ und $\|w\| \leq \|v\|$. Wegen (iii) ist $w \in \Gamma_\infty^{inv}(L_{F\cap A}^2(G), C_E(G))$, und es existiert eine Konstante $K_1 := K_1(E) > 0$, so dass $\gamma_1(w) \leq K_1\|w\|$. Weiter ergibt sich

$$|\operatorname{tr}(u^A v)| = |\operatorname{tr}(u^A w)| \leq \nu_1(u^A w) \leq \pi_1(u^A)\gamma_\infty(w) \leq K_1\pi_1(u^A)\|w\| \leq K_1\|u\|\,\|v\|\pi_1(i_{1,E}),$$

und damit

$$|\operatorname{tr}(tru^A s)| = |\operatorname{tr}(u^A str)| = |\operatorname{tr}(u^A v)| \leq K_1\|u\|\,\|v\|\pi_1(i_{1,E}) \leq K_1\|u\|\pi_1(i_{1,E})\|t\|\,\|r\|\,\|s\|.$$

Mit [2] 5.26 erhalten wir

$$\iota_1(u^A) = \nu_1(u^A) \leq K_1\|u\|\pi_1(i_{1,E}) = K_2\|u\|,$$

wobei $K_2 := K_1\pi_1(i_{1,E})$ unabhängig von u und A ist. Wegen 2.1.1 finden wir ein $\varphi \in L_F^2(G)$, so dass $u^A = u_\varphi$. Die Abschätzung aus 2.1.1 liefert mit einer von A unabhängigen Konstanten

$$\|\varphi\|_2 \leq K_3\nu_1(u^A) \leq K_3K_2\|u\|.$$

Aus der Definition von u^A ergibt sich direkt $\widehat{u^A}(\gamma) = \hat{u}(\gamma)$, falls $\gamma \in A$, und $\widehat{u^A}(\gamma) = 0$, falls $\gamma \in \Gamma \setminus A$. Damit erhalten wir

$$\|\varphi\|_2^2 = \|(\hat{\varphi}(\gamma))_\gamma\|_2^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{u^A}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in A} |\hat{u}(\gamma)|^2.$$

Insgesamt ergibt dies

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{u}(\gamma)|^2 = \sup_{A\subset\Gamma, endl} \sum_{\gamma\in A} |\hat{u}(\gamma)|^2 \leq K_3^2K_2^2\|u\|^2.$$

Nach 2.3.2(ii) ist E eine quasi-Cohenmenge. ■

Der Beweis zeigt etwas mehr: wenn (ii) für ein F erfüllt ist, so gilt (iii) mit demselben F.

2.3.4 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Falls $C_E(G)$ isomorph zu einem Quotienten eines $L_\infty(\mu)$-Raum ist, so ist E eine quasi-Cohenmenge.*

Beweis Sei ohne Einschränkung $w : L^\infty(\mu) \to C_E(G)$ eine Quotientenabbildung, und sei $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L_E^2(G), C_E(G))$ beliebig. Für jedes $\gamma \in E$ existiert ein $x_\gamma \in L^\infty(\mu)$ mit $wx_\gamma = \gamma$. Da $\|w\| \leq 1$ ist, können wir annehmen, es sei $\|x_\gamma\|_\infty \leq 2\|\gamma\| = 2$. Für jedes $f \in L_E^2(G)$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in E} \|\hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)x_\gamma\|_\infty &= \sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)|\,|\hat{f}(\gamma)|\,\|x_\gamma\|_\infty \leq 2\sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)|\,|\hat{f}(\gamma)| \\ &\leq 2(\sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2}(\sum_{\gamma\in E} |\hat{f}(\gamma)|)^{1/2} = 2(\sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2}\|f\|_2.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist wegen 2.1.6 endlich. Damit ist der Operator

$$v : L^2_E(G) \to L^\infty(\mu); f \mapsto \sum_{\gamma \in E} \hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)x_\gamma$$

wohldefiniert und stetig mit $\|v\| \leq 2(\sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2}$. Weiter erhalten wir für $f \in Trig_E$

$$\begin{aligned}(wv)(f) = w(v(f)) &= w(\sum_{\gamma\in E} \hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)x_\gamma) = \sum_{\gamma\in E} \hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)w(x_\gamma) \\ &= \sum_{\gamma\in E} \hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma\in E} u(\hat{f}(\gamma)\gamma) = u(\sum_{\gamma\in E} \hat{f}(\gamma)\gamma) = u(f),\end{aligned}$$

und damit gilt $wv = u$, da $Trig_E$ in $L^2_E(G)$ dicht liegt. Damit faktorisiert u durch einen $L_\infty(\mu)$-Raum, gehört also zu $\Gamma^{inv}_\infty(L^2_E(G), C_E(G))$. Wegen des vorhergehenden Satzes ist E eine quasi-Cohenmenge. ■

Im folgenden Satz wird gezeigt, wie man aus gegebenen quasi-Cohenmengen neue konstruieren kann.

2.3.5 Satz *Seien G_j kompakte, abelsche Gruppen, Γ_j die dazugehörigen dualen Gruppen und $E_j \subset \Gamma_j$ quasi-Cohenmengen ($j = 1, 2$). Dann gelten:*

(i) $E_1 \times E_2$ ist eine quasi-Cohenmenge in $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

(ii) $(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \setminus ((\Gamma_1 \setminus E_1) \times (\Gamma_2 \setminus E_2))$ ist eine quasi-Cohenmenge in $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

(iii) Falls $G_1 = G_2$ gilt, so ist $E_1 \cup E_2$ eine quasi-Cohenmenge in $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(iv) Falls $G_1 = G_2$ gilt, so ist $E_1 \cap E_2$ eine quasi-Cohenmenge in $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(v) Für jeden Gruppenhomomorphismus $\Psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ ist $\Psi^{-1}(E_2)$ eine quasi-Cohenmenge in Γ_1.

Beweis Seien für den ganzen Beweis μ_1, μ_2 gemäss 2.3.2(v) zu den Mengen E_1 und E_2 gehörende quasi-idempotente Masse mit $\hat{\mu}_i(\gamma) \geq 0$ für $\gamma \in \Gamma$.

(i) Aus 1.4.11 wissen wir, dass $\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma) = \hat{\mu}_1(\gamma_1)\hat{\mu}_2(\gamma_2)$ für jedes $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma(G_1 \times G_2)$. Genau dann ist also $\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma) = 0$, wenn $\hat{\mu}_1(\gamma_1) = 0$ oder $\hat{\mu}_2(\gamma_2) = 0$, d.h. wenn $\gamma_1 \notin E_1$ oder $\gamma_2 \notin E_2$. Dies ist wiederum gleichbedeutend damit, dass $(\gamma_1, \gamma_2) \notin E_1 \times E_2$. Damit haben wir gezeigt, dass der Träger der Fourier-Stieltjes-Transformierten von $\mu_1 \otimes \mu_2$ die Menge $E_1 \times E_2$ ist. Ebenfalls mit 1.4.11 gilt

$$|\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma)|^2 = |\hat{\mu}_1(\gamma_1)|^2 |\hat{\mu}_2(\gamma_2)|^2 \geq |\hat{\mu}_1(\gamma_1)||\hat{\mu}_2(\gamma_2)| = |\widehat{\mu_1 \otimes \mu_2}(\gamma)|,$$

womit $\mu_1 \otimes \mu_2$ quasi-idempotent ist. Also ist $E_1 \times E_2$ eine quasi-Cohenmenge.

(ii) Setze $\nu := \mu_1 \otimes \delta_0 + \delta_0 \otimes \mu_2$. Dann ist $\hat{\nu}(\gamma_1, \gamma_2) = \hat{\mu}_1(\gamma_1)\hat{\delta}_0(\gamma_2) + \hat{\delta}_0(\gamma_1)\hat{\mu}_2(\gamma_2)$. Für $(\gamma_1, \gamma_2) \in E_1^c \times E_2^c$ ist offenbar $\hat{\nu}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$. Da $\hat{\delta}_0(\gamma_i) = \int_G \gamma_i(x) d\delta_0(x) = \gamma_i(0) = 1$ und weil μ_i ein positives Mass ist ($i = 1, 2$), gilt $\hat{\nu}(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ genau dann, wenn $(\gamma_1, \gamma_2) \in (\Gamma_1 \setminus E_1) \times (\Gamma_2 \setminus E_2)$. Der Träger von $\hat{\nu}$ ist also $(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \setminus ((\Gamma_1 \setminus E_1) \times (\Gamma_2 \setminus E_2))$. Mit der Positivität der Masse erhält man noch

$$\begin{aligned} |\hat{\nu}(\gamma_1, \gamma_2)|^2 &= |\hat{\mu}_1(\gamma_1) + \hat{\mu}_2(\gamma_2)|^2 = (\hat{\mu}_1(\gamma_1) + \hat{\mu}_2(\gamma_2))^2 \geq (\hat{\mu}_1(\gamma_1))^2 + (\hat{\mu}_2(\gamma_2))^2 \\ &\geq \hat{\mu}_1(\gamma_1) + \hat{\mu}_2(\gamma_2) = |\hat{\mu}_1(\gamma_1) + \hat{\mu}_2(\gamma_2)|, \end{aligned}$$

d.h. ν ist quasi-idempotent.

(iii) Da μ_1 und μ_2 positiv sind, ist der Träger von $(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)$ die Menge $E_1 \cup E_2$. Ebenso einfach erhält man mit

$$|\mu_1(\gamma) + \mu_2(\gamma)|^2 = (\mu_1(\gamma) + \mu_2(\gamma))^2 \geq \mu_1(\gamma)^2 + \mu_2(\gamma)^2 \geq \mu_1(\gamma) + \mu_2(\gamma)|\mu_1(\gamma) + \mu_2(\gamma)|,$$

dass $\mu_1 + \mu_2$ quasi-idempotent ist.

(iv) Aus $\widehat{\mu_1 * \mu_2}(\gamma) = \hat{\mu}_1(\gamma)\hat{\mu}_2(\gamma)$ folgt, dass $\nu := \mu_1 * \mu_2$ ein quasi-idempotentes Mass mit Träger $E_1 \cap E_2$ ist.

(v) Sei Ψ^t der zu Ψ transponierte Gruppenhomomorphismus (vgl. 1.4.7). Definiere damit durch $\mu(A) = \mu_2((\Psi^t)^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathfrak{B}(G_1)$ ein Mass auf G_1. Dann gilt für jedes $\gamma \in \Gamma_1$:

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(x) d\mu(x) = \int_{G_2} \gamma(\Psi^t(y)) d\mu_2(y) = \int_{G_2} (\Psi\gamma)(y) d\mu_2(y) = \hat{\mu}_2(\Psi\gamma).$$

Daraus folgt sofort, dass μ idempotent ist. Weiter ist $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ genau dann, wenn $\hat{\mu}_2(\Psi\gamma) = 0$. Das ist äquivalent zu $\Psi\gamma \in E_2$, das heisst zu $\gamma \in \Psi^{-1}(E_2)$. Der Träger von μ ist also $\Psi^{-1}(E_2)$.

■

2.3.6 Bemerkung Quasi-Cohenmengen stehen in enger Beziehung zu Co-Sidonmengen. In [9] Cor. 3.4 wird gezeigt, dass es zu jeder Sidonmenge $E \subset \Gamma$ ein Mass $\nu_E \in \mathcal{M}(G)$ gibt, so dass $\hat{\nu}_E(\gamma) = 1$ für $\gamma \in E$ und $|\hat{\nu}_E(\gamma)| < \frac{1}{2}$ für $\gamma \in E^c$. Setze $\mu := 2(\delta_0 - \nu_E)$. Wegen $\hat{\delta}_0(\gamma) = 1$ für jedes $\gamma \in \Gamma$ ist $\hat{\mu}(\gamma) = 2 - 2\hat{\nu}_E(\gamma)$. Damit gilt für jedes $\gamma \in E$

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = |2 - 2\hat{\nu}_E(\gamma)| \geq 2 - 2|\hat{\nu}_E(\gamma)| \geq 1$$

und für jedes $\gamma \in E^c$

$$\hat{\mu}(\gamma) = 2 - 2\hat{\nu}_E(\gamma) = 0.$$

$\hat{\mu}$ ist also quasi-idempotent, und E^c ist eine quasi-Cohenmenge.

Die Beziehungen zu den Sidonmengen sind indessen weit enger: nach [8] ist $E \subset \Gamma$ genau dann eine Sidonmenge, wenn das Komplement jeder Teilmenge von E eine quasi-Cohenmenge ist.

2.4 Marcinkiewiczmengen

Eine Menge $E \subset \Gamma$ heisst **Marcinkiewiczmenge**, wenn ein translationsinvarianter Operator $v_E : Trig \to Trig$ existiert, so dass gelten:

(i) Es existiert ein $0 < p < 1$, so dass v_E Typ $(1, p)$ hat,

(ii) $|\widehat{v}_E(\gamma)| = 1$ für $\gamma \in E$ und $\hat{v}(\gamma) = 0$ für $\gamma \in E^c$.

Falls v_E die Bedingungen

(i) Es existiert ein $0 < p < 1$, so dass v_E Typ $(1, p)$ hat,

(ii) $|\widehat{v}_E|^2 \geq |\widehat{v}_E|$,

(iii) $\widehat{v}_E(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in E^c$.

erfüllt, so heisst E **quasi-Marcinkiewiczmenge**. Die Bedingung (iii) bedeutet insbesondere, dass das Bild von v_E in $Trig_E$ liegt.

Natürlich ist jede Marcinkiewiczmenge auch eine quasi-Marcinkiewiczmenge.

2.4.1 Satz *Seien $E \subset \Gamma$ eine quasi-Marcinkiewiczmenge und $u \in \mathfrak{L}^{inv}(C_E(G), L^2(G))$. Dann sind äquivalent:*

(i) u ist nuklear.

(ii) u ist L_1-faktorisierbar.

(iii) u ist 0-summierend.

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii) ist klar.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Dies folgt aus dem Satz von Maurey (1.3.1 (ii)): alle Operatoren von von $L^1(\mu)$ nach $L^2(\nu)$ sind 0-summierend. Ist also $u = ab$ eine Faktorisierung durch $L^1(\mu)$, so ist mit a auch u 0-summierend.

(iii)$\Rightarrow$(i) Seien $u \in \Pi_0^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ und v_E wie in der Definition der quasi-Marcinkiewiczmenge. Wegen $v_E(\gamma) = 0$ für $\gamma \in \Gamma \setminus E$ kann v_E als Operator von $Trig$ nach $Trig_E$ aufgefasst werden. Für $\gamma \in E$ ist weiter $|\hat{v}_E(\gamma)| \geq 1$. Anwendung von 2.1.4 mit $p = \infty$ und $q = 2$ zeigt, dass uv_E vom Typ $(1, 2)$ ist. Damit kann uv_E auf $L^1(G)$ erweitert werden. Wegen 1.4.18 (ii) existiert ein $\varphi \in L^2(G)$ mit $w = u_\varphi$. Es gilt

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{u}(\gamma)|^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{u}(\gamma)\hat{v}_E(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{uv}_E(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{u}_\varphi(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 < \infty.$$

Somit ist

$$\psi := \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{u}(\gamma)\gamma \in L^2(G)$$

wohldefiniert. Für ein beliebiges $f \in C_E(G)$ gilt

$$\begin{aligned} u_\psi(f) = \psi * f &= (\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{u}(\gamma)\gamma) * f = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{u}(\gamma)\gamma * f = \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\gamma \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)u(\gamma)\gamma = u(\sum_{\gamma\in\Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma) = u(f). \end{aligned}$$

Aus 2.1.1 folgt nun die Behauptung. ■

2.4.2 Satz *Sei $E \subset \Gamma$. Dann sind äquivalent*

(i) $\mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$.

(ii) Ist $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$, so ist u^* 1-summierend.

Beweis (i)⇒(ii) Wir verwenden das Kriterium aus 1.3.7. Seien dazu $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$ und $v \in \mathcal{F}(C_E(G), l_1)$, $w \in \mathcal{F}(l_1, L^2(G))$ mit $\|w\| = \|v\| = 1$.

Wir haben $\gamma_1(wv) \leq \|w\|\,\|v\| \leq 1$. Sei $\omega := (wv)_{av} \in \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$. Dann gilt wegen 1.5.4(i) $\gamma_1(\omega) \leq \gamma_1(wv) \leq 1$ und $\operatorname{tr} wvu = \operatorname{tr} \omega u$. Die Voraussetzung ergibt die Existenz einer Konstanten K, welche nicht von $\omega \in \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ abhängt, so dass $\nu_1(\omega) \leq K\gamma_1(\omega)$. Es ist

$$|\operatorname{tr}(wvu)| = |\operatorname{tr}(\omega u)| \leq \nu_1(\omega)\|u\| \leq K\|u\|.$$

u^* ist also 1-summierend, und es gilt $\pi_1(u^*) \leq K\|u\|$.

(ii)⇒(i) Wegen 1.3.6(ii) ist nur die Inklusion „$\supset$“ nicht trivial. Gemäss 1.3.6(vi) müssen wir nur zeigen, dass jeder Operator $v \in \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ 1-integral ist. Dazu benutzen wir die Beziehung $[\mathcal{I}_1, \iota_1] = [\mathfrak{L}^*, \|\cdot\|^*]$ aus 1.3.6(xiii). Seien X und Y endlichdimensionale normierte Räume, $w \in \mathfrak{L}(X, C_E(G))$, $u \in \mathfrak{L}(L^2(G), Y)$, $t \in \mathfrak{L}(Y, C_E(G))$. Bilde damit $s := wtu \in \mathcal{F}(L^2(G), C_E(G))$ sowie $\omega := s_{av}$. Aus der Voraussetzung folgt, dass eine Konstante $K > 0$ existiert, so dass $\pi_1(u^*) \leq K\|u\|$ für jedes $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$ gilt. Zusammen mit $[\Gamma_1^*, \gamma_1^*] = [\Pi_1^d, \pi_1^d]$ (1.3.6 (xi)) erhalten wir

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(tuvw)| = |\operatorname{tr}(wtuv)| = |\operatorname{tr}(sv)| = |\operatorname{tr}(\omega v)| &\leq \gamma_1(\omega)\pi_1(v^*) \\ &\leq K\gamma_1(\omega)\|v^*\| \leq K\gamma_1(s)\|v\| \leq K\|v\|\gamma_1(t)\|u\|\,\|w\|. \end{aligned}$$

Damit ist v nuklear mit $\nu_1(v) \leq K\|v\|$. ■

Nach dem Satz von Grothendieck 1.3.2 hat jeder Operator $u : L^2(G) \to C(G)$ eine 1-summierende Adjungierte. Das folgende Korollar zeigt, dass dies bei geeigneter Wahl von $E \subset \Gamma$ bereits für Operatoren mit Bild in $C_E(G)$ gilt.

2.4.3 Korollar *Sei $E \subset \Gamma$ eine quasi-Marcinkiewiczmenge. Dann ist für jeden Operator $v \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$ der adjungierte Operator v^* 1-summierend.*

Beweis Wegen 2.4.1 gilt $\mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$, und die Behauptung folgt direkt aus 2.4.2. ■

Paley bewies, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass für jedes $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ in der Diskalgebra $A(\mathbb{D})$ die Abschätzung $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2^k}|^2)^{1/2} \leq C\|f\|_1$ gilt. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [20]I.B.24. Die erste Aussage des folgenden Korollars verallgemeinert dieses Resultat.

2.4.4 Korollar *Sei $E \subset \Gamma$ eine quasi-Marcinkiewiczmenge. Dann gelten:*

(i) Für jede Familie $(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ in $\mathbb{C}$ mit $a_\gamma = 0$ für $\gamma \in E^c$ folgt $\sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma|^2 < \infty$ aus $\sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma \hat{f}(\gamma)| < \infty$ für alle $f \in C_E(G)$.

(ii) Ist $u : Trig_E \to Trig$ ein translationsinvarianter Operator vom Typ $(r, 2)$ für ein $0 < r < 1$, so gilt $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{u}(\gamma)|^2 < \infty$.

Beweis (i) Gemäss Voraussetzung ist $w : C_E(G) \to l_1(\Gamma); f \mapsto (a_\gamma \hat{f}(\gamma))_\gamma$ wohldefiniert. Die Linearität von w ist klar. Um die Stetigkeit zu beweisen, verwenden wir den Graphensatz. Sei dazu (f_n) eine Folge in $C_E(G)$, die gegen $f \in C_E(G)$ konvergiert und für die $w(f_n)$ in $l_1(\Gamma)$ gegen $(b_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ konvergiert. Weil für jedes $\gamma \in \Gamma$

$$b_\gamma = \lim_{n\to\infty} w(f_n)_\gamma = \lim_{n\to\infty} a_\gamma \hat{f}_n(\gamma) = a_\gamma \hat{f}(\gamma) = w(f)_\gamma$$

gilt, haben wir $w(f) = (b_\gamma)$. Weiter definieren wir einen Operator $v : l_1(\Gamma) \to L_E^2(G)$ durch die Vorschrift $v(e_\gamma) := \gamma$ für $\gamma \in E$ und $v(e_\gamma) = 0$ sonst. Für $f \in Trig_E$ und $b \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} vw\tau_b(f) &= v(a_\gamma(\hat{f}_b(\gamma)))_\gamma) = v(a_\gamma((\gamma|-b)\hat{f}(\gamma))_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(\gamma|-b)\hat{f}(\gamma)\gamma \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \hat{f}(\gamma)(\gamma|-b)\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \hat{f}(\gamma)\tau_b(\gamma) = \tau_b(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \hat{f}(\gamma)\gamma) = \tau_b vw(f). \end{aligned}$$

Da $Trig_E$ in $C_E(G)$ dicht ist, können wir folgern, dass vw translationsinvariant ist. Nach 2.4.1 ist vw 1-nuklear. Damit existiert wegen 2.1.1 ein $\varphi \in L_E^2(G)$, so dass $vw = u_\varphi$. Für jedes $\gamma_1 \in \Gamma$ gilt $\widehat{vw}(\gamma_1) = a_{\gamma_1}$ wegen

$$vw(\gamma_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \hat{\gamma}(\gamma_1)\gamma_1 = a_{\gamma_1}\gamma.$$

Die Behauptung folgt aus

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{vw}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{u}_\varphi(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 < \infty.$$

(ii) Seien $0 < r < 1$ und $u : Trig_E \to Trig$ ein translationsinvarianter Operator vom Typ $(r, 2)$. Sei $\tilde{u} \in \mathfrak{L}(L_E^r(G), L^2(G))$ die eindeutige Erweiterung von u. Mit $i_{r,E}$ ist auch $v := \tilde{u}i_{r,E}$ r-summierend. Aus 2.4.1 folgt, dass v 1-nuklear ist. Wegen 2.1.1 gilt $v = u_\varphi$ für ein $\varphi \in L_E^2(G)$. Für jedes $\gamma \in E$ ist

$$v(\gamma) = \tilde{u}i_{2,E}(\gamma) = \tilde{u}(\gamma) = u(\gamma) = \hat{u}(\gamma)\gamma,$$

d.h. $\hat{v}(\gamma) = \hat{u}(\gamma)$. Die Behautpung folgt nun aus

$$\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{v}(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{u}_\varphi(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in E} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 < \infty. \qquad \blacksquare$$

2.5 Gordon-Lewis-Mengen

Der folgende Abschnitt knüpft an eine weitere klassische Eigenschaft von Banachräumen an. Ein Banachraum X hat die **Gordon-Lewis-Eigenschaft**, kurz $X \in GL$, wenn jeder Operator $u \in \Pi_1(X, l_2)$ L_1-faktorisierbar ist.

Unter jeder der folgenden Bedingungen besitzt der Banachraum X die Gordon-Lewis-Eigenschaft:

- X^{**} ist komplementiert in einem Banachverband.
- X ist isomorph zu einem Quotienten eines $C(S)$-Raumes.
- X ist isomorph zu einem Unterraum eines $\mathfrak{L}_1$-Raumes.

Weiter hat X genau dann die Gordon-Lewis-Eigenschaft, wenn dies auch für X^* gilt. Die Beweise dazu findet man in [15].

Wir betrachten nun die analoge Eigenschaft für translationsinvariante Operatoren. Ein translationsinvarianter Banachraum X von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen hat die **invariante Gordon-Lewis-Eigenschaft**, kurz $X \in IGL$, wenn $\Pi_1^{inv}(X, L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(X, L^2(G))$.

Entsprechend nennen wir $E \subset \Gamma$ eine **Gordon-Lewis-Menge**, wenn der Raum $C_E(G)$ die invariante Gordon-Lewis-Eigenschaft hat.

Offenbar gilt $X \in IGL$ für jeden invarianten Raum $X \in GL$.

2.5.1 Lemma *Sei $E \subset \Gamma$ eine Gordon-Lewis-Menge. Dann existieren Konstanten C_1 und C_2, so dass gilt*

$$\gamma_1(u) \leq C_1 \pi_1(u) \leq C_2 \gamma_1(u) \ \forall u \in \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)).$$

Beweis Die zweite Abschätzung haben wir bereits in 1.3.6(vi) gesehen. Aus dieser folgt auch, dass die Identität $\Phi : \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \to \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ stetig ist. Mit dem Graphensatz folgt die Stetigkeit der Umkehrabbildung und damit die erste Ungleichung. $\blacksquare$

Gordon-Lewis-Mengen stehen in enger Beziehung zu den bereits eingeführten Mengen.

2.5.2 Satz *Genau dann ist $E \subset \Gamma$ eine quasi-Cohenmenge, wenn E sowohl eine quasi-Marcinkiewiczmenge als auch eine Gordon-Lewis-Menge ist.*

Beweis „⇒“ Sei E eine quasi-Cohenmenge. Aus 2.3.3 wissen wir, dass

$$\Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)).$$

Zusammen mit 1.3.6(ii) und 1.3.6(v) erhalten wir

$$\Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \subset \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) \subset \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)),$$

d.h. $\Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$. E ist also eine Gordon-Lewis-Menge. Um zu zeigen, dass E quasi-Marcinkiewicz ist, setzen wir $v_E := u_\nu|_{Trig}$, wobei ν ein quasi-idempotentes Mass wie in der Definition von quasi-Cohenmengen ist. Da u_ν als Faltungsoperator Typ $(1,1)$ hat, erfüllt v_E die Bedingung (i) in der Definition. Die Bedingung (ii) ergibt sich direkt aus der quasi-Idempotenz von ν, denn es gilt

$$|\hat{v}_E(\gamma)|^2 = |\hat{\nu}(\gamma)|^2 \geq |\hat{\nu}(\gamma)| = |\hat{v}_E(\gamma)|.$$

Die letze Voraussetzung ist wegen $\hat{\nu}(\gamma) = \hat{v}(\gamma)$ für $\gamma \in E$ erfüllt.

„⇐“ Da E eine quasi-Marcinkiewiczmenge ist, gilt wegen 2.4.1

$$\mathcal{N}_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)).$$

Weil E auch eine Gordon-Lewis-Menge ist, folgt weiter

$$\Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)) = \Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G)).$$

Aus 2.3.3 zusammen mit der an den Beweis anschliessenden Bemerkung folgt die Behauptung. ■

Eine ähnliche Charakterisierung exisistiert auch für Sidonmengen.

2.5.3 Satz *E ist eine genau dann eine Sidonmenge, wenn E sowohl eine $\Lambda(2)$-Menge als auch eine Gordon-Lewis-Menge ist.*

Beweis Von Pisier [14] 3.3 übernehmen wir, dass jede $\Lambda(2)$-Menge, die auch eine Gordon-Lewis-Menge ist, eine Sidonmenge ist. Sei E umgekehrt eine Sidonmenge. Nach 2.2.6 ist E eine $\Lambda(2)$-Menge. Sei $u \in \Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$. Sei weiter π_E die Orthogonalprojektion von $L^2(G)$ auf $L^2_E(G)$. Dann ist $u = k_{2,E}\pi_E u$. Nach 2.2.3 ist $\pi_E u$ und damit auch u L_1-faktorisierbar. Somit ist E auch eine Gordon-Lewis-Menge. ■

Die folgenden zwei Sätze werden in erster Linie dazu benutzt, um zu zeigen, dass eine gegebene Menge $E \subset \Gamma$ keine Gordon-Lewis-Menge ist. In [8] Proposition 6.0 findet man dazu ein Beispiel.

2.5.4 Satz *Seien E eine Gordon-Lewis-Menge und $0 < r < \infty$. Dann existiert eine Konstante $C := C(E, r)$, so dass für alle $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ und $v \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^r_E(G))$ gilt:*

$$(\sum_{\gamma\in\Gamma} \|\hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\|^2)^{1/2} \leq C\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,r}.$$

Beweis Mit $i_{1,E} : C_E(G) \to L^1_E(G)$ ist auch $ui_{1,E}$ 1-summierend; dabei gilt $\pi_1(ui_{1,E}) \leq \pi_1(i_{1,E})\|u\|$. $ui_{1,E}$ ist L_1-faktorisierbar, denn E ist eine Gordon-Lewis-Menge. Wegen 1.3.1 (ii) ist $ui_{1,E}$ r-summierend, und mit einer Konstanten $C_1 > 0$ gilt

$$\pi_r(ui_{1,E}) \leq C_1\gamma_1(ui_{1,E}) \leq C_1C_2\pi_1(ui_{1,E}) \leq \pi_1(i_{1,E})C_1C_2\|u\|.$$

Betrachte nun den Operator $\bar{v} : Trig \to Trig_E; f \mapsto v(f)$ und wende 2.1.4 mit $p = \infty$ und $q = 2$ auf $ui_{1,E}$ und $\bar{v}$ an. Es folgt, dass $ui_{1,E}\bar{v}$ vom Typ $(1, 2)$ ist und dass

$$\|ui_{1,E}\bar{v}\|_{1,2} \leq \pi_r(ui_{1,E})\|\bar{v}\|_{1,r} \leq C\|u\|\|v\|_{1,r}$$

mit $C := \pi_1(i_{1,E})C_1C_2$ gilt. Weiter erhalten wir

$$\widehat{ui_{1,E}v}(\gamma) = \hat{u}(\gamma)\widehat{i_{1,E}}(\gamma)\hat{v}(\gamma) = \hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)$$

für jedes $\gamma \in E$. Da $ui_{1,E}v \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1(G), L^2(G))$ Bild in $L^2_E(G)$ hat, existiert nach 1.4.18 ein $\varphi \in L^2_E(G)$ und ein von φ unabhängiges $K > 0$, so dass $ui_{1,E}v = u_\varphi$ und $\|\varphi\|_2 \leq K\|u_\varphi\|$. Die Behauptung ergibt sich nun aus

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in E} |\hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)|^2 &= \sum_{\gamma\in E} |\widehat{ui_{1,E}v}|^2 = \sum_{\gamma\in E} |\hat{u}_\varphi|^2 = \sum_{\gamma\in E} |\hat{\varphi}|^2 = \|\varphi\|_2^2 \\ &\leq K^2\|u_\varphi\|^2 = K^2\|ui_{1,E}v\|^2 \leq K^2C^2\|u\|^2\|v\|^2. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

2.5.5 Satz *Seien $E \subset \Gamma$ eine Gordon-Lewis-Menge, $u, v \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ und $f \in Trig_E$. Dann existiert ein $C := C(E) > 0$, so dass*

$$\sum_{\gamma\in E} |\hat{v}(\gamma)\hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)| \leq C\|u\|\,\|v\|\,\|f\|_\infty.$$

Beweis Zu einem fest gewählten $f \in Trig_E$ sei w_f der Operator aus 2.1.5. Weil $i_{1,E}$ 1-summierend ist, gehören $ui_{1,E}$ und $vi_{1,E}$ zu $\Pi_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$. Da E eine Gordon-Lewis-Menge ist, folgt daraus, dass $ui_{1,E}$ und $vi_{1,E}$ zu $\Gamma_1^{inv}(C_E(G), L^2(G))$ gehören und dass mit einer nur von E abhängigen Konstanten $C > 0$

$$\gamma_1(ui_{1,E}) \leq C\pi_1(ui_{1,E}) \tag{11}$$

und

$$\gamma_1(vi_{1,E}) \leq C\pi_1(vi_{1,E}) \tag{12}$$

gelten. Setze $v_f := vi_{1,E}w_f(i_{1,E})^*u^* \in \mathfrak{L}(L^2(G), L^2(G))$. Dann existieren Masse μ und ν und Operatoren $a \in \mathfrak{L}(L^1(\mu), L^2(G))$, $b \in \mathfrak{L}(C_E(G), L^1(\mu))$, $c \in \mathfrak{L}(L^\infty(\nu), (C_E(G))^*)$ und $d \in \mathfrak{L}(L^2(G), L^\infty(\nu))$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} v_f : L^2(G) \arrow[r, "u^*"] \arrow[dr, "d"'] & (L^1_E(G))^* \arrow[r, "(i_{1,E})^*"] & (C_E(G))^* \arrow[r, "w_f"] & C_E(G) \arrow[r, "i_{1,E}"] \arrow[dr, "b"'] & L^1_E(G) \arrow[r, "v"] & L^2(G) \\ & L^\infty(\nu) \arrow[ur, "c"'] & & & L^1(\mu) \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

a und $bw_f c$ sind 2-summierend, so dass v_f 1-nuklear ist. Mit einer Konstante $K > 0$ ist

$$\nu_1(v_f) \leq K\gamma_1(ui_{1,E})\gamma_1(vi_{1,E})\|f\|_\infty.$$

Zusammen mit (11) und (12) erhalten wir

$$\nu_1(v_f) \leq KC^2\pi_1(ui_{1,E})\pi_1(vi_{1,E})\|f\|_\infty \leq KC^2\pi_1(i_{1,E})^2\|u\|\,\|v\|\,\|f\|_\infty \leq KC^2\|u\|\,\|v\|\,\|f\|_\infty.$$

Für $x^* \in (L^2(G))^*$ gilt

$$\begin{aligned} v_f(x^*) &= v(i_{1,E}(w_f((i_{1,E})^*(u^*(x^*))))) = v(i_{1,E}(w_f(u^*(x^*) \circ i_{1,E}))) \\ &= v(i_{1,E}(\sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\langle u^*(x^*) \circ i_{1,E}, \gamma\rangle\gamma)) = v(\sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\langle u^*x^*, \gamma\rangle\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\langle u^*x^*, \gamma\rangle\hat{v}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\langle x^*, u\gamma\rangle\hat{v}(\gamma)\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\langle x^*, \gamma\rangle\hat{v}(\gamma)\gamma = \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\langle\gamma, x^*\rangle\gamma \\ &= (\sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\hat{u}(\gamma)\hat{v}(\gamma)\gamma \otimes \gamma)(x^*). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\nu_1(v_f) = \sigma_1(v_f) = \sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)||\hat{u}(\gamma)||\hat{v}(\gamma)|$. ■

2.5.6 Lemma *Sei $E \subset \Gamma$. Für jeden Operator $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$ gilt*

$$(\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq \|u\|.$$

Beweis Mit j_2 ist auch $j_2 k_E u$ 2-summierend, und somit ein Hilbert-Schmidt-Operator (1.3.6(ix)). Es gilt

$$(\sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{u}(\gamma)|^2)^{1/2} = (\sum_{\gamma \in \Gamma} \|\hat{u}(\gamma)\gamma\|_2^2)^{1/2} = (\sum_{\gamma \in \Gamma} \|j_2 k_E u\gamma\|_2^2)^{1/2} \leq \sigma_2(j_2 k_E u) \leq \pi_2(j_2)\|u\| = \|u\|.$$

■

2.5.7 Satz *Seien $E \subset \Gamma$ und $2 < p < \infty$ so, dass $L_E^p(G)$ die invariante Gordon-Lewis-Eigenschaft hat. Genau dann ist $w \in \Gamma_1^{inv}(L_E^p(G), L^2(G))$, wenn ein $\varphi \in L^2(G)$ existiert, so dass $w = u_\varphi|_{L_E^p(G)}$. In diesem Fall existiert ein $C > 0$, so dass*

$$\|\pi_E\varphi\|_2 = (\sum_{\gamma \in E} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq C\gamma_1(w).$$

Beweis „$\Leftarrow$" Sei φ wie in der Behauptung, und sei $u_\varphi : L^1(G) \to L^2(G)$ der zugehörige Faltungsoperator. $w = u_\varphi k_{1,E} i_{p,1,E} = u_\varphi|_{L_E^p(G)}$ ist L_1-faktorisierbar.

„⇒“ Seien μ ein Mass und $a \in \mathfrak{L}(L^1(\mu), L^2(G))$ und $b \in \mathfrak{L}(L^p_E(G), L^1(\mu))$ Operatoren, so dass $w = ab$. $(L^p_E(G))^*$ ist ein Quotient des $\mathfrak{L}_{p^*}$-Raum $L^{p^*}(G)$, beide Räume haben Cotyp 2 wegen $p^* < 2$. Folglich ist

$$\mathfrak{L}(L^\infty(\mu), (L^p_E(G))^*) = \Pi_2(L^\infty(\mu), (L^p_E(G))^*),$$

und insbesondere gehört b^* zu $\Pi_2(L^\infty(\mu), (L^p_E(G))^*)$. Es gibt also einen Hilbertraum H und Operatoren $c \in \mathfrak{L}(H, L^1(\mu))$ und $d \in \mathfrak{L}(L^p_E(G), H)$, so dass $b : L^p_E(G) \xrightarrow{d} H \xrightarrow{c} L^1(\mu)$. Mit a gehört auch ac zu $\Pi_2(H, L^2(G))$. Wegen 2.5.6 gilt für jedes $v \in \mathfrak{L}^{inv}(L^2(G), C_E(G))$

$$\sum_{\gamma\in E} \|di_{p,E}v\gamma\|^2 = \sum_{\gamma\in E} \|d\hat{v}(\gamma)\gamma\|^2 = \sum_{\gamma\in E} \|\hat{v}(\gamma)d\gamma\|^2 \leq \sum_{\gamma\in E} |\hat{v}(\gamma)|^2\|d\|^2\|\,\|\gamma\|^2$$
$$\leq \|d\|^2 \sum_{\gamma\in E} |\hat{v}(\gamma)|^2 \leq \|d\|^2\|v\|^2.$$

Also ist auch $di_{p,E}v$ ein Hilbert-Schmidt-Operator und gehört damit zu $\Pi_2(L^2(G), H)$ (vgl. 1.3.5(ii)). Damit ist $wi_{p,E}v$ als Komposition von zwei 2-summierenden Operatoren nuklear (1.3.6(iv)) und es gilt folgende Abschätzung:

$$\nu_1(wi_{p,E}v) \leq \sigma_2(ac)\sigma_2(di_{p,E}v) \leq \pi_1(ac)\|d\|\,\|v\| \leq \pi_1(a)\|c\|\,\|d\|\,\|v\| \leq \kappa_G\|a\|\,\|c\|\,\|d\|\,\|v\|.$$

Durch Übergang zum Infimum über alle Faktorisierungen erhalten wir

$$\nu_1(wi_{p,E}v) \leq \kappa_G\gamma_1(w)\|v\|.$$

Für jedes $v \in \mathfrak{L}(L^2(G), C_E(G))$ gilt

$$|\operatorname{tr}(wi_{p,E}v)| = |\operatorname{tr}(wi_{p,E}v_{av})| \leq \nu_1(wi_{p,E}v_{av}) \leq \kappa_G\gamma_1(w)\|v_{av}\| = \kappa_G\gamma_1(w)\|v\|.$$

Somit ist $wi_{p,E}$ 1-integral und wegen 1.3.6(vi) auch 1-nuklear. Wegen 2.1.1 existiert ein $\varphi \in L^2(G)$, so dass $wi_{p,E} = u_\varphi|_{C_E(G)}$ und damit $w = u_\varphi|_{L^p_E(G)}$. Da w auf $L^p_E(G)$ definiert ist, kann φ durch $\pi_E\varphi$ ersetzt werden.

Es bleibt noch die Ungleichung zu zeigen. Dazu betrachten wir

$$\Phi : \{u_\varphi : \varphi \in L^2_E(G)\} \to \Gamma_1^{inv}(L^p_E(G), L^2(G)); u_\varphi \mapsto u_\varphi|_{L^p_E(G)}.$$

Wegen des ersten Teils des Beweises ist Φ wohldefiniert und offensichtlich linear. Die Stetigkeit folgt aus

$$\gamma_1(\Phi(u_\varphi)) = \gamma_1(u_\varphi k_{1,E}i_{p,1,E}) \leq \|u_\varphi\|\gamma_1(k_{1,E}).$$

Weiter ist Φ injektiv und wegen des zweiten Teils des Beweises surjektiv. Aus dem Graphensatz und 1.4.15 folgt für $w = u_\varphi \in \Gamma_1^{inv}(L^p_E(G), L^2(G))$ mit von φ unabhängigen Konstanten C_1 und C_2

$$\|\pi_E\varphi\|_2 \leq C_1\|u_\varphi\| \leq C_2\gamma_1(\Phi^{-1}(u_\varphi)) = C_2\gamma_1(w).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Hat also $L^p_E(G)$ für $2 < p < \infty$ die invariante Gordon-Lewis Eigenschaft, so sind die L_1-faktorisierbaren Operatoren $w : L^p_E(G) \to L^2(G)$ genau die Faltungsoperatoren zu einem $\varphi \in L^2(G)$. Dies verwenden wir für folgende Abschätzung:

2.5.8 Korollar *Seien $E \subset \Gamma$ und $2 < p < \infty$. Weiter habe $L^p_E(G)$ die invariante Gordon-Lewis-Eigenschaft. Dann existiert ein $C := C(E)$, so dass für jedes $u \in \mathfrak{L}^{inv}(L^1_E(G), L^2(G))$ und für jedes $f \in L^{p^*}(G)$ gilt*

$$(\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq C\|u\|_{1,2}\|f\|_{p^*}.$$

Beweis Sei $f \in L^{p^*}(G)$. Wegen 1.4.18 ist der Operator $v_f : L^p_E(G) \to C_E(G); g \mapsto g * f$ wohldefiniert mit $\|u_f\| \leq \|f\|_{p^*}$. Setze $w := ui_{1,E}v_f \in \Pi_1^{inv}(L^p_E(G), L^2(G))$. Da $L^p_E(G)$ die invariante Gordon-Lewis Eigenschaft besitzt, ist $w \in \Gamma_1^{inv}(L^p_E(G), L^2(G))$, und es existiert eine Konstante $C_1 > 0$, so dass

$$\gamma_1(w) \leq C\pi_1(w) \leq C_1\|u\|\pi_1(i_{1,E})\|u_f\| \leq C_1\pi_1(i_{1,E})\|u\|\,\|f\|_{p^*}.$$

Anwendung von 2.5.7 auf w liefert ein $\varphi \in L^2(G)$, so dass $w = u_\varphi$. Die Ungleichung aus 2.5.7 ergibt

$$\begin{aligned}(\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)\hat{\varphi}(\gamma)|^2)^{1/2} &= (\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)\widehat{i_{1,E}}(\gamma)\hat{u}_\varphi(\gamma)|^2)^{1/2} = (\sum_{\gamma \in E} |\hat{w}(\gamma)|^2)^{1/2} = (\sum_{\gamma \in E} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2)^{1/2} \\ &\leq C_2\gamma_1(w) \leq C_1C_2\pi_1(i_{1,E})\|u\|\,\|f\|_{p^*} = C\|u\|\,\|f\|_{p^*}\end{aligned}$$

mit $C := C(E) := C_1C_2\pi_1(i_{1,E})$. ■

Mit Hilfe diese Resultates können wir die Frage beantworten, wann eine $\Lambda(2)$-Menge sogar eine $\Lambda(p)$-Menge ist.

2.5.9 Korollar *Seien $E \subset \Gamma$ eine $\Lambda(2)$-Menge und $2 < p < \infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) E ist eine $\Lambda(p)$-Menge.

(ii) $L^p_E(G)$ ist isomorph zu einem Hilbertraum H.

(iii) $L^p_E(G)$ besitzt die Gordon-Lewis-Eigenschaft.

(iv) $L^p_E(G)$ besitzt die invariante Gordon-Lewis-Eigenschaft.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$ Aus 2.2.2(ii) folgt, dass $L^p_E(G)$ isomorph zum Hilbertraum $L^2_E(G)$ ist.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ und $(iii) \Rightarrow (iv)$ sind klar.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Wenn E eine $\Lambda(2)$-Menge ist, gibt es einen Isomorphismus $u : L^1_E(G) \to L^2_E(G)$ mit $\|u\| \leq 1$. Wegen 2.5.8 existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für jedes $f \in L^{p^*}(G)$ gilt

$$(\sum_{\gamma \in E} |\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2} = (\sum_{\gamma \in E} |\hat{u}(\gamma)\hat{f}(\gamma)|^2)^{1/2} \leq C\|u\|\,\|f\|_{p^*} = C\|f\|_{p^*}.$$

Insbesondere ist $v : L^{p^*}(G) \to L^2_E(G); f \mapsto \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\gamma$ wohldefiniert. Offensichtlich ist v linear und wegen der Ungleichung stetig. Für $\gamma_0 \in \Gamma$ und $f \in Trig$ gilt

$$\langle v^*\gamma_0, f\rangle = \langle \gamma_0, \sum_{\gamma \in E} \hat{f}(\gamma)\gamma\rangle = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \gamma_0 \in E^c. \\ \langle \gamma_0, \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma)\gamma\rangle = \langle \gamma_0, f\rangle & \text{, falls } \gamma_0 \in E. \end{cases}$$

$L^2_E(G)$ bettet also kanonisch nach $L^p(G)$ ein. Daher ist $L^p_E(G)$ isomorph zu $L^2_E(G)$. ■

Literatur

[1] J. Bourgain and V. Milman. Dichotomie du cotype pour les espaces invariants. *C.R.Acad. Sc. Paris*, 300:263–266, 1985.

[2] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely summing operators.* Cambridge, 1995.

[3] J. Diestel and J.J. Uhl. *Vector measures.* AMS, 1977.

[4] G.B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis.* CRC Press, 1995.

[5] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract harmonic analysis*, volume 1. Springer, 1970.

[6] E. Hewitt and K. A. Ross. *Abstract harmonic analysis*, volume 2. Springer, 1970.

[7] N. J. Kalton and A. Pełczyński. Kernels of surjections from $\mathfrak{L}_1$-spaces with an application to Sidon sets. *Math. Ann.*, 309:135–158, 1997.

[8] S. Kwapień and A. Pełczyński. Absolutly summing operators and translation invariant spaces of functions on compact abelian groups. *Math. Nachr.*, 94:303–340, 1980.

[9] J. M. Lopez and K. A. Ross. *Sidon sets.* Marcel Decker Verlag, 1975.

[10] D. Lutz. *Topologische Gruppen.* Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1976.

[11] B. Maurey. *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeur dans les espaces L_p*, volume 11. Asterisque, 1974.

[12] A. Pietsch. *Operator ideals.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, 1978.

[13] G. Pisier. Un nouveau théorème de factorisation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 285:715–718, 1977.

[14] G. Pisier. Some results on Banach spaces without local unconditional structure. *Compositio Math.*, 37:3–19, 1978.

[15] S. Reisner. On Banach spaces having the property G.L. *Pacific Journ. of Math.*, 83:505–521, 1979.

[16] Mangatiana A. Rodera and Paulette Saab. Convolution operators associated with vector measures. *Glasgow Math. J.*, 40:367–384, 1998.

[17] W. Rudin. *Fourier Analysis on Groups.* Intersience Publishers, 1962.

[18] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[19] N. T. Varopoulus. *Sousespaces de C(G) invariants par translations et de type* $\mathfrak{L}_1$. Séminaire Maurey-Schwartz. Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1975/76.

[20] P. Wojtaszczyk. *Banach Spaces for Analysts.* Cambridge University Press, 1991.